EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

24e JAARGANG 1948/49
Nr 5

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang ƒ8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (ƒ8.00*) zijn ingetekend, betalen ƒ6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van ƒ 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1948 t/m 31 Augustus 1949 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van ƒ 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Ook voor 1 September 1949—1 September 1950 is de contributie vastgesteld op ƒ 4,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen ƒ 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lenneplaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

INHOUD.

Oordeel over Eindexamenvraagstukken van 1949.

In verband met het op de laatste Algemene Vergadering aangenomen voorstel zal het Bestuur van Wimecos het op prijs stellen een goed gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van het jaar 1949 te ontvangen. Indien de opmerkingen der leden hier aanleiding toe geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wensen ter kennis gebracht worden. De Secretaris: J. J. TEKELENBURG.

Natuur- en letterkunde, onder de spreuk Diligentiâ, in een „Redevoering over den waren aart en de voortreffelijkheid der Wiskunst, aangewezen in derzelver invloed op alle menschelijke kunsten en weetenschappen"; gehouden „ter gelegenheid van het openen der Wis-, Natuur- en Sterrekundige lessen, welke, onder opzigt van Bestuurderen, aan de Zoonen en Pupillen van de Leden dezer Maatschappij" door hem gegeven werden.

Als Stelling VIII toegevoegd aan de dissertatie van L. E. J. Brouwer [3]) (1907) lezen we: „De verstandhouding der menschen berust op het bouwen van gemeenschappelijke wiskundige systemen, en het verbinden van een zelfde element van zulk een systeem van een levenselement voor elk der individuen".

De definitie van De Gelder houdt in, dat de wiskundige iets mee wil delen aan andere mensen en dat het niet gewenst is voor deze mededeling de gewone taal te bezigen. Hij construeert daarom tekens, symbolen, die beter uitdrukking geven aan zijn gedachten. Maar doet een schilder, een beeldhouwer, een componist niet hetzelfde? Zodra nieuwe mogelijkheden zich voordoen, grijpt de mens naar nieuwe methoden om zijn gedachten beter op de medemens over te brengen. Dom Claude in Victor Hugo's Notre Dame de Paris roept uit: „Le livre tuera l'édifice" [4]) en vandaag zien we de film het boek en de courantenstrip de feuilleton overwinnen.

De uitspraak van Brouwer laat ons de wiskunde zien als een middel om een brug te slaan van mens tot mens. In ander verband wees hij er op, dat „de sprong van doel op middel", het machtigste wapen in de strijd om het bestaan, aan de wiskundige werkwijze ten grondslag ligt.

Deze algemene beschouwingen hebben het gebied van het wiskundig denken nog slechts ruwweg afgebakend. Laat mij daarom bij één enkel kenmerk van de wiskunde iets langer stilstaan, ik bedoel de abstractie. Bij de Grieken wordt het gesprek over de abstractie onder andere door Plato en Aristoteles gevoerd. [5]) Heden ten dage viert de abstracte methode in de wiskunde nieuwe triomfen. En juist dit kenmerk is voor de niet-wiskundige een geliefd aanvalspunt. Men vreest, dat de wiskunde ontaardt in, of zelfs zijn ware aard bloot geeft als een spel met min of meer rare spelregels.

Het duidelijkste zien we deze ontwikkeling in de meetkunde, opgebouwd op zekere axioma's, die ons een meetkundig systeem geven, dat min of meer in onze ervaringsruimte past. De wiskundige is meetkunden gaan bouwen, uitgaande van andere axioma's en verkreeg systemen, die soms in strijd bleken met onze vertrouwde

opvattingen. Waartoe dient het invoeren van niet-euclidische, van meer dimensionale meetkunden? In eerste instantie is men toch geneigd het axiomastelsel zo te kiezen, dat een zo nauw mogelijke aansluiting bij de ervaringen verkregen wordt. Het blijkt even wel, dat de studie van de wiskunde op dit axiomastelsel op te bouwen, vaak eenvoudiger wordt door enkele van de axioma's te laten vervallen. Brouwer wijst er op „dat het steeds blijkt, dat een figuur haar innerlijke eigenschappen eerst dán ontvouwt, als voor haar definitie slechts invarianten voor een zoo wijd mogelijke groep worden gebruikt". [6]) Soms is het voor de oplossingen van problemen in één of ander wiskundig systeem gesteld, noodzakelijk om een uitgebreider systeem aan de onderzoekingen ten grondslag te leggen.

Maar de abstractie heeft nog andere voordelen. Door systemen te onderzoeken, die het oorspronkelijke systeem omvatten, kan men er toe geleid worden de tijdelijk verworpen axioma's door andere te vervangen, die een betere aansluiting aan de ervaringen geven. Soms geeft het omvattende systeem een van aesthetisch standpunt meer bevredigende opbouw, soms geeft het ons aanwijzingen voor nieuwe vondsten, zoals het opstellen van het periodiek systeem aanwijzingen gaf in welke richting men nog onbekende elementen moest zoeken.

Ook dat deel van het door de mens verrichte scheppende werk, dat men gewoon is onder de naam kunst samen te vatten, kent de abstractie. Zonder in te gaan op een door Max Dehn besproken probleem of het ornament een mededeling wil zijn van een rhythmische, hetzij magische, hetzij erotische structuur, dan wel een vereenvoudigde weergave van in de natuur waargenomen objecten, kunnen we het met hem eens zijn: „Der Mensch, der Ornamente schafft und sie betrachtet, hat Gefühle, die zu einem wesentlichen Teil übereinstimmen mit Gefühlen des Menschen, der Mathematisches schafft oder betrachtet." [7])

In de primitieve en moderne schilderkunst liggen talloze aanknopingspunten met het abstracte denken. Picasso en Braque [8]) hebben in een vroegere periode de in hun omgeving waargenomen objecten losgemaakt en opnieuw en anders opgebouwd. Zij werden daarbij vaak getroffen door een enkele lijn, bij voorbeeld de gebogen lijn van een viool, die we dan op vele manieren verwerkt terugvinden. Zij ontleden de waargenomen realiteit in losse elementen en bouwen hiermee de meest wonderlijke bouwsels. Met hun gegeven schoonheids-elementen *construeren* zij *composities* en *configuraties*, waardoor zij ons hun ontroering willen laten mee beleven. Léon

Degand betoogde in een fel en kleurig debat over „Le Problème du Realisme dans la Peinture moderne" onder leiding van F. Léger: alle kunst is abstract, dat wil zeggen: leidt een eigen leven, los van het onderwerp. Non-figuratieve kunst is de kunst, die de motieven uit de realiteit deformeert om ze in een compositie te gebruiken om uit te drukken, wat de kunstenaar bezig hield [9]). Paul Klee vergelijkt de kunstenaar met een boomstam, hij is de band die wortels en takken samenbindt. Evenmin als wortels en takken gelijk gebouwd zijn, zullen werkelijkheid en schilderij gelijk gebouwd zijn. De kunstenaar heeft de rol van de stam, noch dienen, noch regeren, maar overbrengen is zijn taak. [10]) Vreest U in deze beschouwingen te ver af te dwalen van wiskunde en techniek? Ligt de overgang van *vogel*-vleugel naar *vliegtuig*-vleugel niet geheel in dezelfde lijn? Niet nauwkeurig copiëren, zoals eerst beproefd werd, maar een analyseren en zelfstandig opbouwen loste dit technische probleem op.

Veel portretten van Matisse [11]) kenmerken zich door het feit, dat de schilder alleen de omtreklijn van het gezicht tekent en de ogen, neus en mond weglaat. Waarom laat hij dit alles weg? Omdat het hem op deze manier beter gelukt zijn bedoeling uit te drukken. U ziet: de schilder laat enkele uit de aanschouwing evidente „axioma's" als een gezicht heeft een neus, mond, ogen weg. Andere schilders hebben in dit „omvattender" systeem weer nieuwe axioma's ingevoerd, zoals: een gezicht heeft twee neuzen, of in een gezicht liggen de ogen onder de mond. Een heel stoutmoedige poneerde zelfs wel: In een gezicht bevindt zich iets onder het midden een visje. Na lang experimenteren met beeldhouw- en smeedwerk kwam men met O. Zadkine [12]) tot de ontdekking, dat men het axioma: „een gezicht en profil moet uitgebeeld worden met een bol geslagen vorm" met vrucht kon vervangen door: „een gezicht en profil moet uitgebeeld worden met een *uitgeholde* vorm". Het resultaat van deze nieuwe theorie ziet U in enkele zeer fraaie werkstukken van Zadkine...

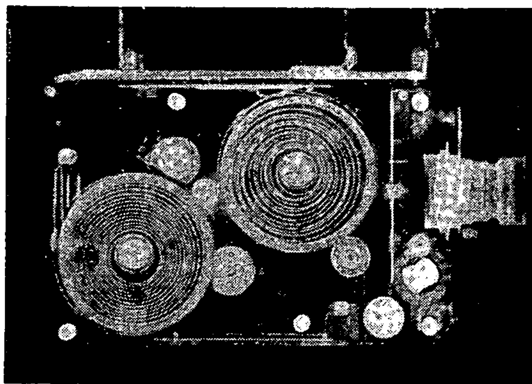
C. H. Waddington gaat zelfs zo ver, dat hij veronderstelt dat Picasso alleen op het idee om portretten „en face" en „en profil" in één te schilderen kon komen, omdat ook hij wel wist, dat wiskundigen dergelijke spelletjes met tijd- en ruimte-coördinaten spelen. [13])

In de middeleeuwse schilderkunst gold het axioma: figuren verder weg in het landschap moeten blauw getint worden om een kleur-perspectief te verkrijgen. Maar in de latere schilderkunst ziet men, dat dit axioma vervallen is verklaard, omdat men op

andere wijze beter zijn doel meende te bereiken. En wanneer we op zovele van Chagall's [14]) schilderijen motieven als een viool, een bloemruiker, een bruidspaar vinden, staan die daar om ons als een „teeken, korter, duidelijker en bepaalder, dan de woorden onzer gebruikelijke spraake zijnde" te wijzen naar zijn vaderland en de romantische Russische volkssprookjes.

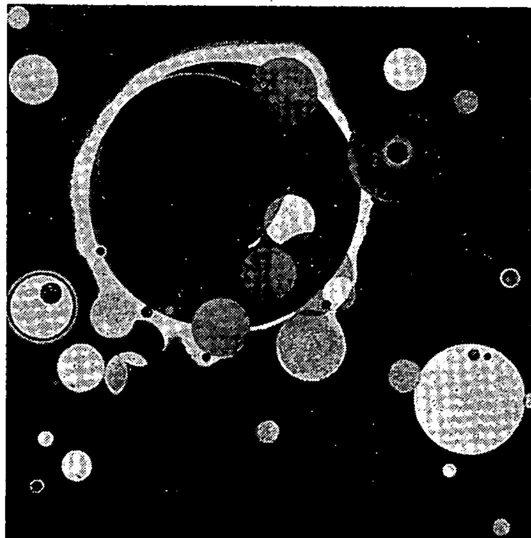
Gelooft U nog steeds niet in de gemeenschappelijke trekken van abstracte kunst en abstracte wiskunde? Ziet U dan eens naar de composities van Piet Mondriaan [15]), F. Vordemberge—Gildewart e.a. Een eenvoudige rechthoekenverdeling, misschien hier en daar een cirkel, zijn het resultaat van een zoeken naar de uiterste eenvoud in de schoonheid. Toegegeven, het doel van deze *composities* is niet direct hetzelfde als het doel van de *constructies* uit het meetkundeboek, maar de werkwijzen van analyseren tot eenvoudigste grondfiguren vertonen grote overeenkomst. Een meetkundige figuur kan zonder commentaar als bewijs voor de stelling van Pythagoras gelden. Beter gezegd de figuur suggereert een bewijs; de getekende lijnen vormen vlakken, die ons in onze gedachten een redenering laten doorlopen, waarin de formule $a^2 + b^2 = c^2$ misschien de laatste schakel is. Gesteund door de titel suggereren enkele tekeningen van Paul Klee ons mechanische problemen; bij voorbeeld: Gewagt wägend (Op een balk steunt aan het rechteruiteinde een steen, boven het linker dreigt hoog een kogel), of Schwankendes Gleichgewicht [16]) (Een veld vol pijlen van verschillende dikte en kleur dreigt het vlak uit elkaar te scheuren). In het laatste doek zien we ook weer het symbool, de pijl, die bij ons spanning te voorschijn roept of zoals in een landschap met ondergaande zon [17]) beweging voortovert. Georg Schmidt zei over Paul Klee: „Hoe zonderling het moge klinken: de opvatting van Klee komt overeen met de verst gevorderde natuurwetenschappelijke inzichten van onze tijd. Evenals de moderne natuurwetenschap slechts in staat is de wereld der dingen en de voor haar geldende wetten slechts in de vorm van het wiskundig symbool, nooit volkomen naturalistisch voorgesteld, in zich op te nemen, is ook de houding van Klee als beeldend kunstenaar van dien aard, dat hij de werkelijkheid niet in nabootsingen, maar in symbolen voorstelt, die sterker zijn, completer en echter dan ieder stuk nagebootste werkelijkheid." [18])

Volgens Waddington laat zich het beste uit de moderne kunst alleen vergelijken met moderne wetenschap en is een werkwijze als die van het cubisme voor niet-vakmensen even moeilijk te benaderen als relativiteitstheorie voor leken op wiskundig gebied. Een stoel is van cubistisch standpunt gezien niet iets, dat in een



Radiograph of 16-mm. magazine Cine Kodak *Eastman Kodak Company*

Fig. 1.



Wasseliy Kandinsky: Einige kreise (1926).

Fig. 2.

COMPOSITIE

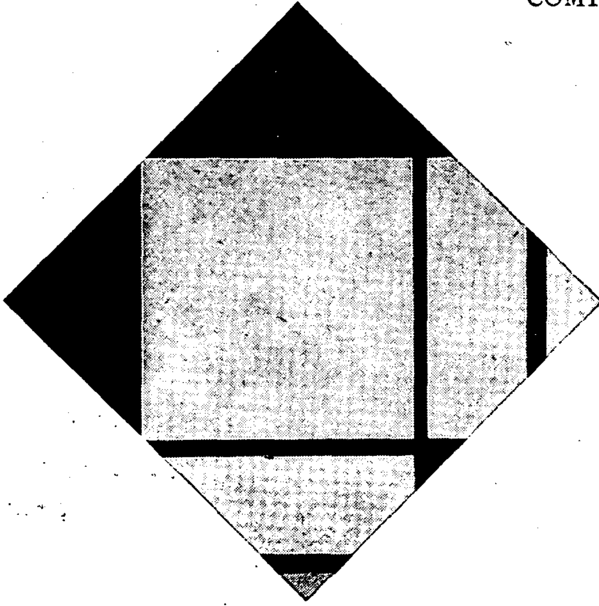


Fig. 3. Piet Mondriaan: Ruitvormig Schilderij (1924).



From Cahiers d'Art.

Blonde by Picasso. He has put in the profile and full-face both at once, presumably because he liked them both, and realized that they belonged together.

Fig. 4.

CONSTRUCTIE

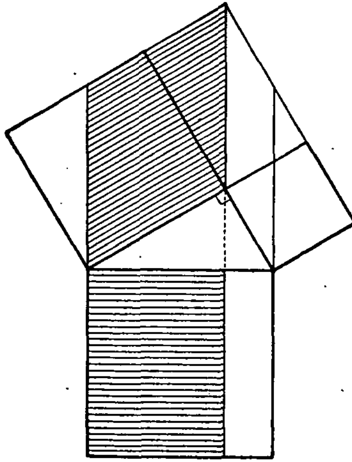


Fig. 5. De stelling van Pythagoras.

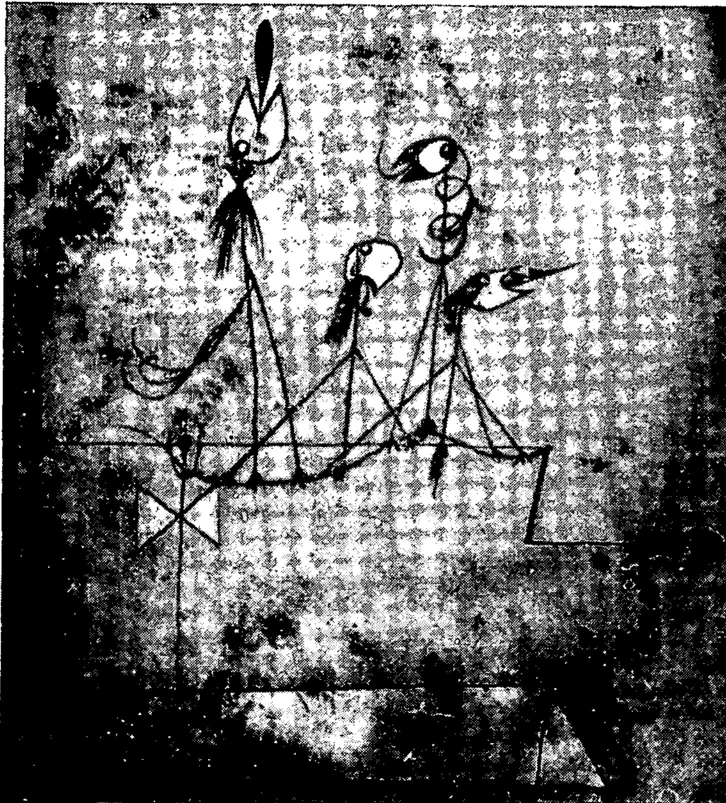
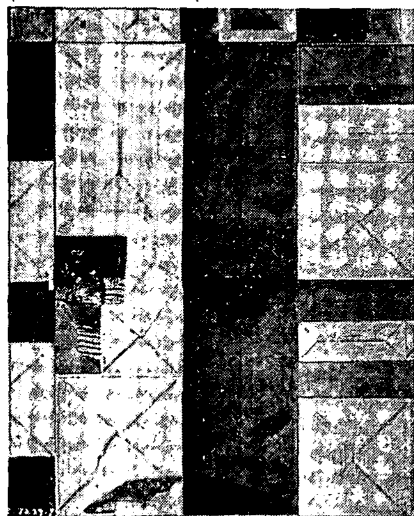


Fig. 6. Paul Klee: Die Zwitschermachine (1922).



Recording methods of cultivation, land usage, and boundaries. Note the ploughing marks, footpaths, and cultivated strips in these fields ; and the farm buildings left-centre *R.C.A.F. photograph*

Fig. 7.

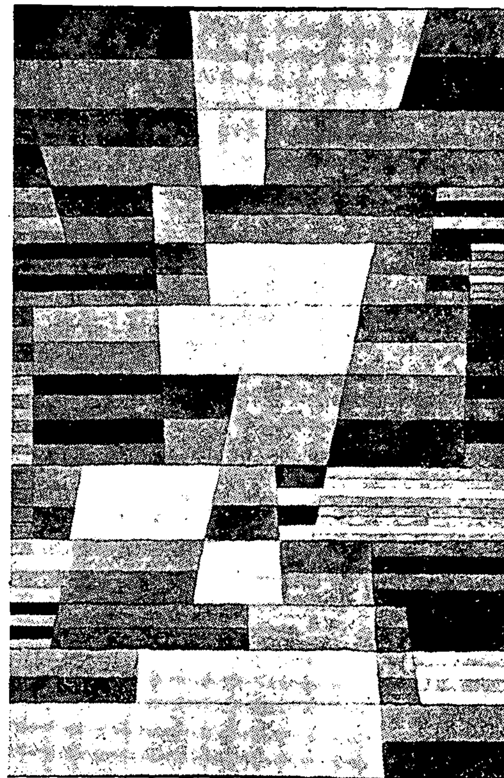


Fig. 8. Paul Klee: Monument im Fruchtland (1929).



Opname April 1949

Dr F. LOONSTRA

geb. 25 Aug. 1910 te Groningen. Hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft in 1949.

kamer staat om op te zitten, maar een ding van een bepaalde vorm, waarvan de meetkundige verhoudingen geanalyseerd kunnen worden, om ze op één of andere wijze op het doek over te brengen. [19]) Doet de cubist met de stoel niet hetzelfde als de wiskundige met de lichtbundel of het touwtje, waar hij de rechte lijn uit afleidt?

Ook de beschrijvende kunst, proza en poëzie kennen de abstractie. Het zou te ver voeren hier een uitgebreid overzicht van te geven. Ik zal mij daarom beperken tot enkele voorbeelden. Voor een deel moeten deze gezien worden als experimenten, uiterste consequenties van het zoeken naar abstractie in de literatuur. Verwant met het door Tristan Tzarda opgezette dadaïsme is de Ursonate van Kurt Schwitters. Een citaat getiteld „Abloesung" is opgenomen in het tijdschrift Transition, beslaat 1½ bladzijde en 160 woorden. Van deze 160 woorden zijn er slechts 10 verschillend. Stilzwijgend doe ik een beroep op Uw welwillendheid om een lettercombinatie als *gnimm* een woord te noemen. Deze woorden worden op haast wiskundige wijze gepermuteerd en gecombineerd. [20]) Een ander uiterste vindt U in de alleen klank maar geen betekenis bezittende letterconstructies van William van Wijck e.a. [21]) De indruk, die deze op ons maken, is geen andere dan de vreemde bekoring, die het luisteren naar ons volkomen vreemde talen soms een ogenblik kan geven. Analoge experimenten vindt U op bescheiden schaal bij vele dichters, ik noem U nog Christian Morgenstern. [22]) Gerrit Achterberg vertelt in Bloem [23]):

De bloemen van uw leven bloeien nog
Ergens staan de geheime kelken open,
wier reuk ik ken, die ik zal doopen
met een nog onbekende naam,
b.v. ledozame,
de z.g. dolybloe,
uit het geslacht der gelyroe,
behorend bij de dolydromen.

Maar ook als men deze uitersten niet kan waarderen, moet men toch toegeven, dat een heilzame invloed ervan op de literatuur is uitgegaan. Via figuren als James Joyce kan men deze invloed zeker naspeuren. Deze experimenten zullen zeker ook van belang zijn voor de wetenschap van de uitdrukkingswijzen, waarvan de mens zich bedient bij het contact met zijn medemens, de signifika. Ik ga hier niet verder op in.

Als slotconclusie uit deze beschouwingen wil ik er op wijzen dat in de wiskunde thans algemeen aanvaard wordt, dat de studie

van „rare" dingen, zoals drie landen met één gemeenschappelijke grens van belang is voor de studie van „gewone" dingen, daar ons dieper inzicht en nieuwe ideeën geschonken worden. Een analoge conclusie voor de „rare" schilderkunst, beeldhouwkunst en literatuur ligt voor de hand.

Toen een bekend bioloog eens gevraagd werd of hij als wetenschappelijk werker belang zou stellen in de vraag naar de onsterfelijkheid van de ziel van de meikever, antwoordde hij: „Zeker, als het probleem met wetenschappelijke methoden opgelost zou kunnen worden." In dat geval zou het „rare" probleem nuttig zijn voor „gewone" problemen.

Men zou kunnen vrezen langzamerhand de techniek uit het oog te verliezen. Om de techniek mee te betrekken in onze beschouwingen zullen we een begrip abstracte techniek moeten invoeren. Daar het misschien niet direct duidelijk is wat we hier onder moeten verstaan, zal ik eerst een verhaal van P. H. Newby, verwerkt in zijn „A Journey to the Interior", navertellen.[24])

Mr Winter wordt om gezondheidsredenen overgeplaatst naar een nederzetting op de grens van Arabische zee en woestijn. Daar ontmoet hij Ford; diens vrouw zegt bij de begroeting: „U zult hier wel wennen, iedereen heeft hier iets vreemds, neem bijvoorbeeld mijn man met zijn machine." Terwijl Winter de machine, die koperdraad met katoendraad omwikkelt, bekijkt, zegt Ford verontschuldigend, dat zijn machine misschien wel slechter is dan andere machines, maar hij heeft hem helemaal zelf ontworpen. Nu wikkelen de rondzwaaiende spoelen de katoen om de koperader, maar opdrachten heeft Ford nooit, de machine wordt nooit *practisch* gebruikt. Hartstochtelijk betoogt Ford: „Ik weet, dat mijn machine nutteloos is, maar het is *mijn* machine. Na analyse van het afgewerkte product heb ik de techniek van het wikkelen zelf teruggevonden. Wat is iedere stap naar het doel een onbeschrijfelijk gevoel geweest! In je hersenen bloeien de lijnen, tandraderen en krachten op. Zo'n machine is iets wondermooisǃ"

Dat kan abstracte techniek genoemd worden, maar ja wat zegt *men* er van? Dr Plunkett weet te vertellen, dat Ford de machine gecopieerd heeft van blauwdrukken uit Londen. En na enige tijd is Winter er van overtuigd, dat Ford toch wel verstandelijke afwijkingen moet hebben: „*Who but a madman would build an entirely useless machine merely for the beauty of it?*" [25])

Zij, die kinderen hebben, vinden daarin een gelukkig excuus om met spoortreintjes en mecano abstracte techniek te bedrijven, zonder direct als een krankzinnige beschouwd te worden. Abstracte

techniek zou men ook verschillende tekeningen van Paul Klee kunnen noemen; ik noem U titels als: „Zeichnung zur Birnendestillation" en „Lenkbarer Grossvater". Enkele van dergelijke tekeningen-constructies hebben ook W. Kandinsky en J. Roede gemaakt. Bij de plastieken denk ik aan A. Calder. Zijn prachtige draad- en plaatjesconstructies zijn zowel voor de maker als de beschouwer, die het liefst de zaak in beweging stelt, een abstract technisch genot.

Iets van abstracte techniek kunt U misschien ook vinden in het verhaal: „In der Strafkolonie" [26]) van Franz Kafka. Hier is het een martelwerktuig, dat met metalen schrijfstiften de zonde van de gevangene in zijn rug graveert.

Achtereenvolgens hebben we een enkel facet van de wiskunde, de beeldende kunsten en de techniek belicht en nu is het tijd een synthese te bouwen, een gemeenschappelijke wortel te zoeken. Deze wortel vinden we in de wiskundige denktechniek. Aan de hand van enkele sprekende voorbeelden komt D. van Dantzig in zijn voordracht: „Over de elementen van het wiskundig denken" tot de conclusie: „Scheppend kunstenaar, dit is de karakteristiek, die de ontwerpende ingenieur met den wiskundige gemeen heeft: hij is machinemens en scheppend kunstenaar in éénen." [27]) En met de wiskundige Van Dantzig stemt de technicus Tellegen in, die in zijn rede bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar in de electrotechniek tot de conclusie komt: „De oorzaak van dit verschijnsel, dat de technische wetenschap in bepaalde opzichten meer verwantschap met de wiskunde dan met de natuurkunde vertoont, is gelegen in het feit, dat techniek en wiskunde beide willen scheppen. De gemeenschappelijke kenmerken van wiskunde en techniek zijn de uitingen van hun beider scheppingsdrang." [28])

Zo is al een eerste band tussen techniek, wiskunde en beeldende kunst gevonden. Naast een uitgebreide wijsbegeerte van de wiskunde is ook de wijsbegeerte van de techniek [29]) gegroeid. Uit de laatste citeert D. Brinkmann in een vrij uitgebreid overzicht in „Mensch und Technik" de volgende kenmerken voor de techniek [30]):

1) techniek is toegepaste natuurkunde.
2) techniek is een middel om economische doelstellingen te verwezenlijken.
3) techniek is middel zonder meer.
4) techniek is een uiting van het menselijk streven naar macht. (Denkt U aan de roofdier-theorie van O. Spengler. [31]))

We zouden een reeks analoge opvattingen over de wiskunde naast elkaar kunnen stellen:

1) wiskunde is toegepaste logica.
2) „De mensch is er toe gekomen wiskundig te denken, omdat hij alleen door die denkmethode toe te passen in staat was, in de steeds ingewikkelder en moeilijker wordende bestaansstrijd de overhand te behouden". (L. E. J. Brouwer in een discussie over „De formalistische methode in de signifika" [32])).
3) wiskunde is een hulpwetenschap, een rekenapparaat.
4) Ik zal de wiskundigen zelf niet aan het woord laten over hun streven naar macht, maar twee zinsneden van niet-wiskundigen naar voren brengen. Dr E. Klöti, burgemeester van Zürich, zei ter gelegenheid van het International Mathematiker Kongress: „Die Mathematiker sind ja überall so geachtete Wissenschaftler und so harmlose Menschen, dasz wir uns gar nicht vorstellen können, dasz sie nicht überall willkommen wären." [33]) Hoewel we ons gestreeld voelen door het praedicaat „harmlos", vrezen we niet steeds zo welkom te zijn. Voor de tweede uitspraak kies ik enkele losse zinsneden uit het hoofdstuk de Loxodroom in Bordewijks roman Rood Paleis: „Zooals een leek kijkt in een boek over mathematiek, verbluft, verbijsterd, . . . Men vraagt zich af wat voor zin het heeft zulke teekens uit te denken, men is zich niet bewust van de geheime overmacht der wiskunde . . . Voor dit raadsel een naam ontleed aan de zuiverste, raadselachtigste, onmenschelijkste van alle wetenschappen, de wiskunde". [34]) Van Dantzig citeerde in zijn reeds eerder genoemde voordracht een passage uit een boek van Thomas Mann, waarin beschreven wordt welk een magische kracht van een bladzijde wiskunde-dictaat-cahier uitgaat. [35]) Zo worden wij, wiskundigen, of we het willen of niet, vaak aangekeken als de tovenaar-medicijnman, van wie magische krachten tot redding of verderf uitgaan. Van G. Mannoury is de uitspraak: „De natuurmens, die zich bij zaaien of oogsten, bij aanval of verweer, door de voorspellingen van de tovenaar laat leiden, en de kultuurmens, die bij zijn produktie en destruktie de logarithmen en de integralen te hulp roept, zijn volkomen analoge verschijnselen: beiden gissen zij naar hetgeen hun wensen of behoeften het best en het meest zal bevredigen." [36])

Ook voor de beeldende kunsten zou ik aan de hand van de vier kernwoorden: toepassing, sociaal doel, dienende functie, streven naar macht gemakkelijk overeenkomstige uitspraken kunnen vinden. We zouden dan voor ieder van de drie gebieden wiskunde, techniek, beeldende kunst over de vier kenmerken moeten discussiëren. In plaats hiervan beschouw ik alleen de techniek en volg

een door Brinkmann aangegeven gedachtengang, die een geheel ander facet van de techniek gaat belichten. In hoeverre deze gedachtengang zich in de andere gebieden als wiskunde en kunst laat interpreteren, laat ik hier open. Vermoedelijk zal de lezer zelf iets van de consequenties kunnen aanvoelen.

Brinkmann bestrijdt voor de techniek de boven genoemde kenmerken en als eerste these om het wezen van de techniek te benaderen voert hij aan: „Der christliche Erlösungsglaube wird vom technischen Menschen in eine Sehnsucht nach Selbsterlösung umgebogen." [37]) De techniek is volgens hem gegroeid uit de alchemie. Ter illustratie van deze stelling voert hij een merkwaardig voorbeeld aan; de vader van Friedrich Fröbel voerde in Thüringen industrieën in om de daar nog altijd werkende alchemisten nuttiger bezigheden te verschaffen. Dat het doel van de alchemie zelfverlossing is werd door C. G. Jung [38]) opgemerkt. In dit verband voert Brinkmann enkele opmerkelijke citaten van Paracelsus en Fr. Bacon aan. Zijn slot-conclusie is: „Der ganze Enthusiasmus, der die moderne Welt der Technik erfüllt, ohne den sie niemals das geworden wäre, was sie heute ist, lässt sich nur verstehen, wenn man *zutiefst ein aus dem Christlichen Glauben abgeleitetes, leidenschaftliches Streben nach aktiver Selbsterlösung* am Werke sieht. Aus dieser religiösen Triebkraft leitet sich die beispiellose Entfaltung der Technik seit der älteren Neuzeit im Abendland her. Zugleich hängen aber auch alle jene verheerende Folgen damit zusammen, deren letzte schauerliche Steigerung wir im Verlauf des zweiten Weltkrieges miterlebt haben." [39])

Naast of misschien beter gezegd als onderdeel van dit streven naar actieve zelfverlossing tracht de technische mens ook zijn scheppingsdrang te uiten. Franz Werfel zegt in zijn rede [40]): „Von der reinsten Glückseligkeit des Menschen" dat het hoogste geluk te vinden is in het naam geven en daardoor zelf herscheppen van de ervaringen. Dit geluk is verloren gegaan, onder andere in de ontwikkeling, waarin een kenmerkende stap die van hiëroglief tot alfabet was. De namen verloren hun waarde als „vergelijking", als ontroering en in kunst en religie tracht men de verloren waarden terug te vinden. Zo staat de kunst van heden nog het dichtst bij het naamgeven van de eerste mens. In dit verband wil ik nog wijzen op de Chinese jade-amuletten, die bepaalde abstracte begrippen als zuiverheid, vastberadenheid, adel vertegenwoordigen. Door beschouwing of betasting van het sieraad gaat iets van hetgeen voorgesteld wordt op de eigenaar over. [41]) Iets dergelijks vindt men bij de Thibetaanse gebedsmolens. De wiskunde zal in

ogenblikken, waarin hij door de invoering van nieuwe begrippen, nieuwe symbolen de oude waarheden samenvat en nieuwe perspectieven opent, zeker ook iets gevoelen van het geluk, dat de eerste mens in zijn eerste werk vond, toen hij in de hof van Eden de dieren namen gaf. Wanneer de wiskundige voor een gebied van de ervaringen een mathematisch model opstelt, kan men zeggen dat hij zijn ervaringen herschept en met het model meer vertrouwd raakt dan met de ervaringen zelf. De technische mens heeft het soms koppige, maar trouwe paard vervangen door een mechanisch model, het stoompaard, minder koppig en minder trouw, al noemden de tijdgenoten van de eerste stoommachine hem een „ijzeren Engel". De vinger, die in het zand schreef is vervangen door de ball-point pen en de aanbidding van de muze door een „Gebed aan de schrijfmachine", zoals Achterberg één van zijn gedichten noemt. [42])

Dat ik over wiskunde schreef, zal niemand verbaasd hebben, Dat ik iets over de techniek mee betrok in mijn beschouwingen. zal de lezer mij niet euvel duiden. Maar de kunst? Staat de kunst niet los van wetenschap en techniek? Ik behoef slechts de naam van Leonardo da Vinci te noemen om een voorbeeld voor intense samenwerking tussen kunst en techniek aan te voeren. Dat de kunstenaar Leonardo en de ingenieur Leonardo, niet twee personen in een zelfde lichaam, maar één harmonisch geheel vormden, zult U met mij eens zijn. Martin Johnson onderzocht in „Art and Scientific Thought" nauwkeurig wat Leonardo da Vinci als wetenschappelijk kunstenaar kenmerkt. [43]) In onze dagen is de schilder-ingenieur F. Léger [44]) een voorbeeld van een technisch gericht kunstenaar. Enkele gemeenschappelijke uiterlijke kenmerken van beeldende kunst en wiskunde wil ik alleen aanstippen door te wijzen op het ornament [45]), de gulden snede [46]) en de lettervormen uit Dürer's: Underweysung der Messung mit dem Zirckel. [47])

H. von Helmholtz is ervan overtuigd, dat kunst en wetenschap verwant zijn en naar elkaar toe zullen groeien en samen gaan werken. [48]) Een speelse illusie in deze richting vinden we in de geschiedschrijving van het Glasperlenspiel door Hermann Hesse. Van de verbroedering van wetenschap en kunst is het Glasperlenspiel, een uit de muziek ontstane en door wiskundigen uitgebouwde universele uitdrukkingswijze, het hoogste zinnebeeld [49]).

Misschien kan de kunst ons een weg wijzen uit de vele problemen, waarin de mens door de ontwikkeling van techniek en wetenschap zich geworpen heeft. Frans Werfel formuleert deze verwachting: „Der Schöpfer hat den Menschen aufgerichtet. Die lange Wan-

derung der Geschichte beugt ihn immer wieder herab. Wir Gewaltigen, die den Raum durchfliegen und den Ätherwellen Zügel anlegen, wir wanken zugleich todmüde des Weges, den Blick starr auf den Boden gesenkt. Ist es so schwer, den Kopf zu heben? Brennt nicht unauslöschlich auch in uns die verzehrende Sucht nach dem Höheren? Nicht verloren hat unsere Seele die platonische Erinnerung an die Mania, an den ekstatischen Zustand unsrer Morgenfrühe. Die Abgekehrtheit und der Stoffwahn dieser Gegenwart wird wie ein Angsttraum zerrinnen. Das Seher- und Sagertum, der Kunst aber ist eine der hilfreichen Mächte, die liebend harrt, den Menschen aus diesem Angsttraum aufzuwecken. [50])

En hiermee ben ik aan het einde van mijn beschouwingen gekomen. Ik heb getracht er op te wijzen, dat wiskunde, techniek en kunst enkele facetten gemeen hebben. Opzettelijk heb ik vele trekken van ieder van deze gebieden onaangeroerd gelaten en daardoor misschien een éénzijdig beeld gegeven. Ik heb mij niet tot doel gesteld een signifisch verantwoorde kritische studie van het aangegeven probleem te ontwikkelen. Dan had ik alle citaten moeten analyseren en menige uitspraak zou in een andere vorm gegoten moeten worden. Ik heb slechts een emotioneel getint overzicht willen geven van dit probleem en stelde mij ook een emotioneel doel te weten: de lezer er van te overtuigen, dat de wiskundige denkwijze niets „onmenselijks" heeft. Whitehead zegt: I will not go so far as to say that to construct a history of thought without profound study of mathematical ideas of succesive epochs is like omitting Hamlet from the play which is named after him. That would beclaiming too much. But it is certainly analogous to cutting out the part of Ophelia. This simile is singularly exact. For Ophelia is quite essential to the play, she is very charming, — and a little mad. [51])

Kunstenaar, ingenieur en wiskundige, drie reizigers, niet door altijd groene weiden, maar trekkend door dorre woestijnen van oase tot fata morgana en van fata morgana tot oase. Op reis naar een doel, even vaag en onbereikbaar als „das Schlosz" voor de landmeter K(afka), maar gesteund door enkele verwarde geluiden, die de telefoon uit „das Schlosz" overbracht. [52])

AANTEKENINGEN.

Bij de keuze van de voorbeelden uit de beeldende kunst is een duidelijke invloed merkbaar van de in de laatste jaren gehouden tentoonstellingen in het Stedelijk Museum te Amsterdam. De catalogi van deze tentoonstellingen kunnen dus als illustratie gebruikt worden. Verder wordt verwezen naar het standaard werk van

Carl Einstein: Die Kunst des 20 Jahrhunderts. (Propyläen Verlag, Berlijn, 1931), geciteerd als C.E.

[1]) Geciteerd volgens: *Pierre Kemp:* Pacific. (Bruna, Utrecht, 1946) pag. 2.

[2]) *Jacob de Gelder:* Redevoering over den waren aart en de voortreffelijkheid der Wiskunst, ... (In den Haag, bij de erven van Isaac van Cleef, 1806) pag. 7.

[3]) *L. E. J. Brouwer:* Over de grondslagen der wiskunde. (Maas en Van Suchtelen, Amsterdam, 1907).

[4]) *Victor Hugo:* Notre Dame de Paris, livre cinquième, II.

[5]) Zie b.v. *J. Stenzel:* Anschauung und Denken in der Griechischen Mathematik. Verh. Int. Math. Kongr. Zürich 1932, pag. 329.

[6]) *L. E. J. Brouwer:* Het wezen der meetkunde. Rede, uitgesproken 12 October 1909. (Noordhoff, Groningen, 1909) pag. 18.

[7]) *Max Dehn:* Ueber Ornamentik. Norsk Mat. Tidskr. **21** (1939), pag. 121—153; i.h.b. pag. 129.

[8]) *Pablo Picasso* en *Georges Braque* zie C.E. pag. 308 e.v., pag. 345 e.v.; i.h.b pag. 310, 347.

[9]) Geciteerd volgens: *Piet Kraus:* Constructie der schoonheid. Kroniek van Kunst en Kultuur **9** (1948), pag. 107—109.

[10]) *Paul Klee:* Ueber die moderne Kunst. (Benteli, Bern, 1945) pag. 11—13.

[11]) *Henri Matisse:* 24 Oeuvres de Henri Matisse, Préface de Jean Cassou (Ed. de la Connaissance, Palais des Beaux-Arts, Brussel, 1946) fig. 9, 16, 18, 19.

[12]) *Ossip Zadkine:* Vergelijk „Zadkine" uitgave stedelijk museum Amsterdam No. 40; i.h.b. No. 9 Dubbel portret in brons.

[13]) *C. H. Waddington:* The scientific attitude. (Penguin Books A 84, 1948) pag. 50.

[14]) *Marc Chagall* zie C.E. pag. 500 e.v. Vooral ook Chagall, Peintures 1942—1945 (Les éditions du Chêne, Parijs, 1947).

[15]) *Piet Mondriaan* e.a. zie C.E. pag. 514—517.

[16]) *Paul Klee* zie C.E. pag. 537.

[17]) *Paul Klee* zie *Herbert Read:* Klee (1879—1940). (Faber and Faber, Londen, 1948).

[18]) *Georg Schmidt:* Paul Klee, Reden zu seinem Todestag 29 Juni 1940. Geciteerd volgens: Paul Klee, uitgave stedelijk museum Amsterdam 1948, No. 41.

[19]) l.c. [13]) pag. 43.

[20]) *Kurt Schwitters:* abloesung. Transition (Servire, den Haag) **22** (1933) pag. 38—39. Zie ook: lanke tr gl (skerzoo aus meiner soonate in uurlauten) Transition **21** (1932), pag. 320.

[21]) Transition **22** (1933) pag. 129—130.

[22]) *Christian Morgenstern:* Alle Galgenlieder (Insel, Leipzig, 1941) Das Grosse Lalulā (pag. 23).

[23]) *Gerrit Achterberg:* Stof. (Helicon **23**, 1946) pag. 24.

[24]) *P. H. Newby:* A Journey to the Interior. (Guild books **401**, 1948) Chapter II, pag. 24—43.

[25]) l.c. [24]) Chapter IX, pag. 159.

[26]) *Franz Kafka:* Erzählungen und Kleines Prosa. (Schocken, New York, 1946) pag. 181.

[27]) *D. van Dantzig:* Over de elementen van het wiskundig denken. Euclides **9** (1932—1933) pag. 102—116.

[28]) *B. D. H. Tellegen:* Verschillen tussen zuiver- en toegepast-wetenschappelijk onderzoek. (Delftse Uitg. Mij., 1948).

[29]) We doen een greep, geput uit het onder [30]) geciteerde werkje:
Leo Kestenberg: Kunst und Technik. (Berlijn, 1930).
Friedrich Dessauer: Philosophie der Technik (Bonn, 1927). Befreiung der Technik (Stuttgart, 1931).
Adolf Faut: Technik, Technisches Zeitalter und Religion (Tubbingen, 1931).
Nicolaj Berdjajew: l'Homme et la Machine (1946).
[30]) *Donald Brinkmann:* Mensch und Technik. (Sammlung Dalp 8, Bern, 1946) pag. 74 e.v.
[31]) *Oswald-Spengler:* Der Mensch und die Technik. (Beck, München, 1931).
[32]) *G. Mannoury:* De „Wiener Kreis" en de signifische begrippenanalyse. Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsbegeerte en Psychologie, **29** (1935), pag. 89.
[33]) Verh. Int. Math. Kongr. Zürich 1932, pag. 76.
[34]) *F. Bordewijk:* Rood Paleis. (Nijgh en v. Ditmar, Rotterdam, 1936) pag. 234, 236.
[35]) *Thomas Mann:* Königliche Hoheit. (Fisher, Berlijn, 1909) pag. 299.
[36]) *G. Mannoury:* Over de sociale betekenis van de wiskundige denkvorm. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam op Maandag 8 Oktober 1917. (Noordhoff, Groningen, 1917).
[37]) l.c. [30]) pag. 107.
[38]) *C. G. Jung:* Die Erlösungsvorstellung in der Alchemie. (Eranos-Jahrbuch 1936, Zürich 1937) pag. 13 e.v. Paracelsica (Zürich, 1937) pag. 71, 90. Psychologie und Alchemie (Zürich, 1944) pag. 109 e.v.
[39]) l.c. [30]) pag. 140.
[40]) *Franz Werfel:* Von der einsten Glückseligkeit des Menschen. (Ausblicke, Bermann—Fischer, Stockholm, 1938).
[41]) Verg. *Martin Johnson:* Art and scientific Thought. (Faber and Faber, London) pag. 47—56.
[42]) *Gerrit Achterberg:* Osmose (Stols, Rijswijk, 1941) pag. 21.
[43]) l.c. [41]) Part IV, pag. 129—182.
[44]) *Fernand Léger* zie C.E. pag. 384 e.v., zie ook pag. 614 en plaat XXXIX.
[45]) B.v. *A. Speiser:* Die Theorie der Gruppen von endliche Ordnung. (Dover, New York, 1945) pag. 76—96 (Kap. 6); Die Mathematische Denkweise. (Birkhäuser, Basel, 1945).
[46]) B.v. *J. Poortenaar:* De Gulden Snede. Torenreeks **8—9** (Naarden, z.j.).
[47]) *A. Dürer:* Underweysung der Messung mit dem Zirckel. (Nürnberg, 1525).
[48]) Zie *W. Ahrens:* Scherz und Ernst in der Mathematik. (Leipzig 1904) pag. 231.
[49]) *Hermann Hesse:* Das Glasperlenspiel I, II (Fretz & Wasmuth, Zürich, 1943) pag. 48, 129.
[50]) l.c. [40]) pag. 50.
[51]) *A. N. Whitehead:* Science and the modern World. (Cambridge Univ. Press, 1946) pag. 26—27.
[52]) *Franz Kafka:* Das Schlosz. (Schocken, New York, 1946).

Herkomst van de figuren:

2, 3, 8	uit Carl Einstein: Die Kunst des 20 Jahrhunderts.
1, 7	uit Science News 7 (Penguin Books 1948).
4	uit C. H. Waddington; The scientific Attitude.
6	uit Paul Klee, Statements of the Artist. (The museum of modern art, New York).

HET BEGRIP ORDE, IN HET BIJZONDER IN DE WISKUNDE

door

Dr. F. LOONSTRA.[1])

Wanneer ik Uw aandacht vraag voor een bespreking van het begrip „orde" in het algemeen en in het bijzonder van de orde in de wiskunde, dan stel ik mij de volgende problemen voor ogen:

1. Wat is de betekenis van „orde" en „ordening" in het algemeen?
2. Hoe en waar openbaart zich dit begrip in de wiskunde?

De eerste vraag is eenvoudiger te stellen dan te beantwoorden; het is nl. niet gemakkelijk om van een begrip, dat niet alleen in de wiskunde, maar in al ons denken en in onze gehele samenleving een zo voorname rol speelt, ja, waarop onze gehele menselijke cultuur steunt, een systematische bespreking te geven. Welke methode zou men bij die bespreking kunnen volgen? De historische, die de groei van het begrip orde in verband brengt met de geleidelijke ontwikkeling der menselijke beschaving, of wel de wisselende inzichten der wetenschap over het begrip orde? Tientallen eeuwen geleden was de „ordening" reeds een onderwerp van discussie; doch ook voor de moderne geesteswetenschappen, die in onze eeuw het begrip finaliteit boven het begrip kausaliteit stellen en die de finale tendentie ook trachten na te speuren in de systemen, die de mensheid op verschillende gebieden collectief heeft gebouwd en steeds verder bouwt, is het begrip ordening van grote betekenis. Zelfs in de praktische politiek is het woord „ordening" in de laatste tijd in gebruik gekomen.

Bij het uitspreken van de woorden „orde" en „ordening" zal men wellicht onmiddellijk aan regel, regelmatige opeenvolging of rangschikking denken en dit is, afgezien van de letterlijke betekenis van het latijnse ordo = rij misschien de meest algemene betekenis, die men aan het woord orde moet hechten. Laten we enkele voorbeelden nader bekijken:

Ik noem dan eerst de volgorde van een aantal voorwerpen, gerangschikt naar grootte, naar gewicht of naar een ander kenmerk, verder de gebruikelijke volgorde van de natuurlijke getallen, de

---

[1]) Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van lector in de analyse aan de gemeentelijke universiteit te Amsterdam op Woensdag 9 Maart 1949.

kunstmatige volgorde van de letters van het alphabet, de rangschikking van gebeurtenissen naar het tijdstip van plaatsvinden.

We zien hier de rangschikkende orde als de existentie van een — wiskundig gesproken — transitieve, asymmetrische relatie tussen meerdere objecten in die zin, dat de plaats van één object met betrekking tot de andere volkomen bepaald is, zelfs al zien we soms geen directe reden, waarom die plaats nu juist deze en niet die is, zoals bv. de volgorde der letters van het alphabet. Onverschillig echter, of de rangschikking volgens een bepaald voorschrift plaatsvindt dan wel, of deze willekeurig is, zoals in het alphabet, in beide gevallen kan een eenmaal gekozen ordening van groot belang zijn.

De beantwoording van de vraag naar de behoefte aan deze ordening ligt op psychologisch terrein: daartoe dienen we ons oog gericht te houden op de ordezin, die gegroeid is door de ervaring, welke grote voordelen de vastgeworden associatie van de opeenvolging had, niet alleen voor de gewoontevorming, maar voor iedere systeemvorming.

Door die associatie werd een taal- en denk-systeem mogelijk, een tel-systeem en een gebruik van het alphabet als cijfersysteem.

Zo moet wel de grondslag gelegd zijn van stoffelijke welvaart en ook van het geestelijk leven. De zin voor orde uit zich op verschillende wijzen: in een streven naar samenstelling en scheiding, d.w.z. systematisering, òf, zo men wil, naar vereenvoudiging. Het is het streven naar de reductie van de rijke en bonte werkelijkheid tot kleinere groepen, dus naar abstrahering, naar de progressieve uitschakeling van alles wat heterogeen is, naar de meest eenvoudige beschrijving van zij het nog zo gecompliceerde verschijningen, en het is ook voor menigeen het zoeken naar het absolute, onverstoorbare, onveranderlijke, eeuwige, op geestelijk zowel als op stoffelijk gebied.

In het maatschappelijke leven spreekt men van het organisatietalent, dat zich uit door een doelmatige verdeling van arbeid en beloning, van rechten en plichten, òf, dat in de samenleving der mensen door historisch-sociologische studie de zeer samengestelde krachten tracht op te sporen, die geleid hebben en nog steeds leiden tot voortdurende aanpassing van het sociaal-economische systeem aan nieuwe problemen der mensheid.

Ik meen, dat in dit verband deze maatschappijbeschouwing verwant is met die, welke de orde in de natuur ziet als de verzameling van herhalingen, die zich op grond van gedane waarnemingen in de vorm van wetten openbaart. Orde van dit karakter moet men opvatten in die zin, dat de plaats van het geordende

object bepaald schijnt te zijn door een algemene grond, overeenkomstig het principe van de kausaliteit of volgens een wet. Ons verstand ordent de waargenomen verschijnselen.

Onze behoefte aan deze ordening vloeit weer voort uit onze ordezin; de kausale behoefte, het verlangen naar de kennis van de oorzaak als uiting van de behoefte aan opheldering, dus aan „weten" vindt zijn oorsprong in die tak van het ordenend vermogen, waarin men de tendentie naar totaliteit, die van deel tot geheel moet zien.

Vervolgens denk ik aan de orde, die een leraar zich in een grote klas als ideaal voor ogen stelt; deze orde rekenen we tot de sociale orde, d.i. eensdeels het geheel van de regels, waarnaar de burger zich dient te gedragen, anderdeels de onderwerping van de burger aan deze regels; hij moet zich verzetten tegen revolutie, tegen nietnavolgen van de wet; sociale vooruitgang is ontwikkeling van de orde! In dit opzicht stelt het begrip zich lijnrecht tegenover wanorde, d.i. een toestand, waarin men zich in geen enkel opzicht van enige relatie — van welke aard ook — bewust is. Het is zeer de moeite waard om na te lezen, wat Bergson in zijn: „L'évolution créatrice" uitvoerig over dit begrip betoogt. Bergson toch merkt op, dat, wanneer de werkelijkheid zich aan een orde laat onderwerpen, dat mogelijk moet zijn, doordat de afwezigheid van alle orde mogelijk of denkbaar wordt geacht, zodat men dus allereerst het begrip wanorde in de betekenis van afwezigheid van orde moet analyseren. Het staat vast, dat als wij over wanorde spreken, wij aan iets denken. Maar wàt is het, waaraan wij denken? enz.

Wanneer ik met de sociale orde de morele, de religieuze en de aesthetische orde tezamen noem, dan doe ik dat, omdat hier sprake is van orde in die zin, dat de plaats van elk object bepaald wordt door het systeem in verband met een gesteld ideaal.

Aan de hand van deze voorbeelden constateren we, dat „ordening" een zekere rangschikking in het samenzijn van objecten betekent, hetzij in de ruimte, de tijd of de kausaliteit en dan òf in concreto, dus in de uiterlijke wereld, òf in abstracto, dus in de innerlijke wereld; het is een verdeling volgens — of een indeling naar — bepaalde regels of kenmerken.

De wetmatigheid van de natuurprocessen wordt ons niet opgedrongen; ons collectief verstand stelt ons — op grond van bepaalde waarnemingen — in staat om te rangschikken. De ordening van de verkregen kennis is een functie van de activiteit van het bewustzijn, in het bijzonder van ons gemeenschappelijk denken. De gemeenschap stelt zich — onbewust — bij dit proces een doel, een ideaal voor ogen, een harmonie zo men wil, om nl. de ordening van de

ervaringsinhoud zo volmaakt mogelijk te laten geschieden, overeenkomstig met het ideaal van een sociale, ethische of aesthetische ordening. Kant heeft het zeer duidelijk uitgedrukt:

„Ordnung ist die Zusammenfügung nach Regeln" (W. XV, Nachl. Bd. II, blz. 669). „Die Ordnung und Regelmäszigkeit . . . an den Erscheinungen, die wir Natur nennen, bringen wir selbst hinein" (Kritik der reinen Vernunft, blz. 134). „Der Verstand überträgt die „Zeitordnung" auf das Dasein der Erscheinungen und stellt Reihen her, in welchen jede Erscheinung ihre bestimmte Stelle hat und auf bestimmte andere Erscheinungen hinweist; diese Reihen machen Ordnung und stetigen Zusammenhang in der Reihe möglicher Wahrnehmungen notwendig" (Kr. d. r. V., blz. 234).

„Gleichwie die Sinnlichkeit ein Vermögen ist, die Dinge nach Verhältnis von Raum und Zeit zu ordnen, also ist auch die Vernunft ein Gesetz der Zusammenordnung der Dinge abgesondert von den Gesetzen der Sinnlichkeit" (Refl., II, blz. 145). „Freiheit steht auch in den Ordnungen der Natur" (blz. 428).

Tenslotte nog deze opmerking: zo overtuigd als velen zijn van de mening, dat ordening door de menselijke geest plaatsvindt, even overtuigd zijn anderen — ik denk aan Cournot, G. Spicker, M. Palágyi — dat de ordening in de natuur echter wordt geleid buiten de mens om, dat dus het bestaan van de orde in de natuurwereld verondersteld moet worden, waarvan dus elk natuuronderzoek zou dienen uit te gaan.

Wat is de betekenis van orde in de wiskunde? Algemener, wat verstaat men onder ordening van wetenschappen? Aan de beantwoording van deze vraag laat ik de volgende uitspraak voorafgaan: De wetenschap is een levend geheel, alhoewel in onze tijd het bewustzijn van zijn totaliteit en zijn levend-zijn verloren ging onder de heerschappij van het specialistendom. Er kwam een aantal afzonderlijke los van elkander staande wetenschappen voor in de plaats. In plaats van een wederzijds beïnvloeden merkte men juist een onderlinge verwijdering. Maar dat verklaart bovendien het verlangen om in die veelheid van afzonderlijke wetenschappen een orde te scheppen en het hoeft nauwelijks betoogd te worden, dat er haast geen probleem is te noemen, dat zulke innige betrekkingen met alle takken van wetenschap heeft als het ordeprobleem.

Wie echter de wetenschappen wil ordenen, moet behalve over voldoende feitenkennis, ook over een inzicht in het wezen van elk der onderafdelingen beschikken, hetgeen noodzakelijk ten koste van de intensieve kennis van elke afzonderlijke wetenschap gaat,

doch het lijdt geen twijfel, dat het inzicht in de ordening van het totaal de speciaal-studie ten goede komt. Het woord „ordening" wordt hierbij in een betekenis gebruikt, die met „rangschikking" zekere overeenkomst vertoont.

Ter verheldering kan men in plaats van „ordening", van een rationele en continue ordening spreken; rationeel, omdat het ordebeginsel zo diep mogelijk in het te ordenen materiaal moet zijn verankerd, continu, omdat het ordebeginsel voor alle takken van wetenschap gemeenschappelijk van toepassing moet zijn, dus ook voor de wiskunde! Een behandeling van de ordening van de wiskunde in deze zin moge echter nog zo interessant zijn, het is niet mijn bedoeling om het onderwerp van deze zijde te beschouwen. De betekenis van „orde" in de wiskunde in zijn hoedanigheid als rangschikking biedt — vooral na de onderzoekingen van Georg Cantor — reeds zovele aspecten, dat het ruimschoots de moeite loont, om onze aandacht heden hiertoe te bepalen.

Wanneer men van een verzameling objecten twee hoedanigheden noemt: het aantal en de ordening, dan is zonder enige twijfel het begrip „aantal elementen" minder ingewikkeld dan het begrip „orde". Onafhankelijk van elk ordebegrip leiden de elementaire begrippen „element", „verzameling", „deelverzameling" en „eeneenduidige betrekking" tot het begrip aantal of kardinaalgetal; aan alle verzamelingen, die men eeneenduidig op elkaar kan afbeelden, voegt men één en hetzelfde symbool — het kardinaalgetal van die verzamelingen — toe. Als men een orde voor de elementen van een verzameling tot stand wil brengen, moeten er tussen de elementen betrekkingen bestaan en men heeft zich dus af te vragen, welke soort van betrekkingen een ordening bepalen en bovendien, of het mogelijk is om de verschillende soorten orde-bepalende relaties tot een eenheid terug te brengen. De manier om een orderelatie tot stand te brengen is de volgende: Men stelt een betrekking vast tussen de elementen — die ik kort door S aanduid — in die zin, dat voor elk tweetal elementen a en b van de verzameling een betrekking $a\mathrm{S}b$ of $b\mathrm{S}a$ bestaat, die gelijktijdig optreedt, als a en b hetzelfde element voorstellen, terwijl a en b aequivalent of geassocieerd worden genoemd, wanneer zowel $a\mathrm{S}b$ als $b\mathrm{S}a$ geldt. De relatie moet bovendien transitief zijn, d.w.z.: uit $a\mathrm{S}b$ en $b\mathrm{S}c$ volgt noodzakelijk $a\mathrm{S}c$. De betekenis van de S kan van geval tot geval verschillen: wanneer we de verzameling van de natuurlijke getallen als voorbeeld kiezen en $a\mathrm{S}b$ noemen, als $a \leqq b$, dan krijgt S de betekenis van „kleiner dan of gelijk aan".

Soms ziet men aan de vorm van de geordende verzameling

de betekenis van S, zoals aan de volgende rangschikking van de natuurlijke getallen:

$$2, 4, 6, \ldots, 1, 3, 5, \ldots,$$

waarin *aSb* de orderelatie naar grootte voorstelt wanneer *a* en *b* beide even of beide oneven zijn; zijn *a* en *b* echter van verschillende pariteit, dan staat steeds het even getal links, het oneven getal rechts van S.

Een ander belangrijk voorbeeld: Voor een axiomatische opbouw van de meetkunde heeft men de zg. „tussenaxioma's" nodig (zie bv. B. L. van der Waerden, De logische grondslagen der Euklidische meetkunde, Noordhoff, Groningen), die door middel van een begrip „tussen" het volgende bepalen:

1. Als B tussen A en C ligt, dan zijn A, B en C drie verschillende punten van één rechte lijn.
2. Als A, B en C drie verschillende punten van één rechte lijn zijn, dan ligt één en slechts één van hen tussen de beide andere.
3. Als A en B twee verschillende punten zijn, dan bestaat er minstens één punt C zó, dat B tussen A en C ligt.
4. Wanneer A, B en C punten buiten een vlak V zijn en wanneer tussen A en B een punt van V, maar tussen B en C geen punt van V ligt, dan ligt tussen A en C een punt van V.

Op grond van deze tussenrelaties nu is men in staat om elke lijn als een „geordende" verzameling van punten op te vatten in die zin, dat voor elk tweetal verschillende punten *a* en *b* een betrekking S is aan te geven, die aan alle hierboven gestelde voorwaarden voldoet; men spreekt dan *aSb* aldus uit: „*a* ligt links van *b*".

Uit deze en talloze andere voorbeelden ziet men duidelijk, dat de ordebepalende betrekking van velerlei aard kan zijn: hetzij een rangschikking naar grootte, of naar ligging enz., doch de formele betrekkingen, waaraan voldaan is, blijken voor alle voorbeelden dezelfde te zijn.

Van een doelbewuste bestudering van dit onderwerp is voor 1850 vrijwel geen sprake. Bepalen we onze aandacht een ogenblik tot de axiomatische onderzoekingen van Euklides; we weten, dat gedurende eeuwen Euklides' axiomatische onderzoekingen als voorbeeld voor welke methodische behandeling van welke wetenschap ook golden. Dat men later voor een opbouw van de meetkunde axioma's meende te moeten toevoegen — ik denk in dezen aan het onderzoek van Hilbert —, dat men bezwaren zag in de theorie over de evenwijdigheid, doet aan de waarde van het Euklidische stelsel niets af. Doch juist de essentiële tussenaxioma's, waarover ik

zopas sprak, en die — na een uitvoerig onderzoek van M. Pasch in zijn „Vorlesungen über neuere Geometrie", Leipzig, 1882 — eerst door Hilbert in zijn bekend axiomasysteem zijn opgenomen, treffen we bij Euklides niet aan, hoewel ze door Euklides wel stilzwijgend worden toegepast.

Dit is vanzelfsprekend een bezwaar tegen de voorstelling van Euklides; hij gebruikt, om in onze taal te spreken — zoals Klein [1]) het uitdrukt — bij zijn geometrische grootheden zoals lijnsegment, hoek, nooit een voorteken, doch hij beschouwt ze steeds als absolute grootheden; hij werkt dus in zeker opzicht met een analytische meetkunde, waarin de coördinaten slechts in absolute waarde optreden. Het gevolg ligt voor de hand: zó kan men nooit tot algemeen geldige stellingen komen, ja men moet steeds afzonderlijke gevallen onderscheiden. Dit bezwaar, dat hier op analytische wijze tot uitdrukking komt, laat zich anders onder woorden brengen: het onderscheid in een voorteken komt meetkundig overeen met een onderscheid in de ordening, in die zin, of een punt A tussen B en C ligt, dan wel buiten het segment BC. Men krijgt pas een volledige logische meetkundige grondslag, wanneer men er de axioma's van „tussenliggen" nadrukkelijk bij opneemt. Tot dat inzicht is men echter, zoals Klein [1]) ons mededeelt, nog geen eeuw geleden gekomen. In dit verband is uit historisch oogpunt een stuk uit een brief van Gausz aan Bolyai van 6 Maart 1832 van belang: „Voor een volledige behandeling moeten zulke woorden als „tussen" eerst tot scherp gedefinieerde begrippen worden teruggebracht — hetgeen ook best mogelijk is — maar wat ik nog nergens heb gezien", aldus Gausz. De eerste scherpe meetkundige formulering van deze tussenaxioma's gaf M. Pasch; hier treedt voor het eerst de uitspraak op: wanneer een lijn één zijde van een driehoek snijdt, dan snijdt hij ook zeker één van de beide anderen.

Tegenover het gebrek echter aan deze onmisbare schakels in de voorstelling van Euklides staat een groot bezit.

In het vijfde boek nl. worden de bewerkingen met rationale getallen op irrationale grootheden overgedragen in de vorm van een leer van algemene verhoudingen van grootheden, speciaal van verhoudingen van segmenten.

Euklides gaat aldus te werk: hij neemt twee gehele getallen m en n aan en vergelijkt de beide segmenten $m \cdot a$ en $n \cdot b$ enerzijds, $m \cdot c$ en $n \cdot d$ anderzijds met betrekking tot hun grootte;

---

[1]) F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, II; Leipzig, blz. 217.



Opname April 1949

Prof. Dr J. DE GROOT

geb. 7 Mei 1914 te Garrelsweer; in 1949 benoemd tot hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hogeschool te Delft.

er zal steeds één van de drie betrekkingen $m \cdot a \lesseqgtr n \cdot b$ resp. $m \cdot c \lesseqgtr n \cdot d$ bestaan. Geldt nu voor elke keuze van m en n steeds in beide gevallen hetzelfde teken, dan wordt $a/b = c/d$ genoemd. In feite komt dit overeen met het snede-beginsel van Dedekind, met behulp waarvan hij later de irrationale getallen invoert.

Euklides stelt nadrukkelijk vast, dat hij slechts van de verhouding van twee grootheden a en b wil spreken, wanneer twee gehele getallen m en n zijn te bepalen, zodanig, dat $m \cdot a > b$ en $a < n \cdot b$, of met zijn woorden: een verhouding bezit grootheden, die, verveelvuldigd, elkander kunnen overtreffen (Euklides V, def. 4) of nòg anders, zoals Archimedes aangeeft in de voorrede tot de kwadratuur van de parabool, evenals in de voorrede tot zijn „spiraallijnen": het zal mogelijk moeten zijn om het overschot van de grotere van twee ongelijke stukken door samenstellen met zichzelf groter te maken dan elk gegeven begrensd stuk. De in beide bewoordingen uitgesproken voorwaarde duidt men tegenwoordig algemeen als het postulaat van Eudoxus aan. Dit postulaat nu heeft een enorme betekenis als continuïteitspostulaat in de moderne onderzoekingen over de grondslagen van de meetkunde en van de algebra. Datgene wat het postulaat van Eudoxus uitsluit, zijn dus die systemen van grootheden, die — volgens de oude terminologie — aktueel oneindig kleine of aktueel oneindig grote elementen bevatten: men spreekt dan van niet-archimedische systemen, in tegenstelling tot archimedische systemen, waarvoor het postulaat van Eudoxus wel vervuld is. De juiste betekenis van dit postulaat beseft men pas volkomen, wanneer men eén voorbeeld voor ogen heeft van een verzameling van grootheden, die dit postulaat niet bevredigt; ik doel in dit verband op het bekende meetkundige voorbeeld van de hoornvormige hoeken, een voorbeeld, dat in de oudheid al veel stof heeft doen opwaaien. U weet, dat men in het algemeen de hoek tussen twee vlakke krommen in een snijpunt definieert als de hoek tussen hun raaklijnen en vanuit dit standpunt vormen alle hoeken een gewoon archimedisch systeem, dat met behulp van de reële getallen kan worden gemeten. Verstaat men echter onder de hoornvormige hoek tussen twee krommen in hun snijpunt het door de beide krommen in de buurt van hun snijpunt of raakpunt ingesloten deel van het vlak, dan geeft deze definitie aanleiding tot een verzameling van grootheden, die niet aan het bewuste postulaat voldoet. Men bedenke slechts, dat de hoek tussen een cirkel en een raaklijn hieraan kleiner is dan elke scherpe hoek (wanneer „scherp" in de gebruikelijke zin wordt opgevat). Het opnemen van het postulaat van Eudoxus is dus de onmiddellijke

ontkenning van het bestaan van zg. oneindig kleine lijnstukjes, die kleiner dan elk eindig lijnstuk zijn.

De betekenis van het ordebegrip in de wiskunde is eerst door de ontwikkeling van de verzamelingsleer duidelijk aan het licht getreden. Het was voornamelijk Georg Cantor (1845—1918), die, in de jaren 1879—'84, met een rij van begrippen een methodisch onderzoek naar verzamelingen instelde, waardoor hij ook oneindige verzamelingen onder de heerschappij van de wiskundige wetten wist te scharen. Er was inderdaad veel moed en overtuigingskracht voor nodig om de studie van datgene, wat boven het eindige uitging, tot een tak van wiskundige wetenschap te verheffen. Cantor getuigt zelf, dat hij tien jaren aarzelde, alvorens hij er toe besloot om zijn ideeën voor de mathematische wereld publiek te maken. Hij deed het eerst, toen het voor hem vast stond, dat zijn begrippen aan alle eisen voldeden, die men redelijkerwijze mocht stellen.

De verzamelingsleer als wetenschap bestaat vanaf het tijdstip, dat Cantor de aftelbaarheid als een scherp omlijnd begrip invoerde, nadat hij oneindige verzamelingen naar hun machtigheid ingedeeld had en hij in het bijzonder aangetoond had, dat de algebraïsche getallen een aftelbare verzameling vormden, dat het continuum daarentegen niet-aftelbaar is.

De enige voorganger, die Cantor op dit gebied bezit, is Bolzano; in zijn „Paradoxien des Unendlichen" heeft Bolzano reeds getracht om voor oneindige verzamelingen het begrip „aantal" vast te leggen, en wel met behulp van de eeneenduidige betrekking tussen de elementen van beide verzamelingen. Het is bekend, dat men dan onmiddellijk op de kwestie: gelijkheid van deel en geheel stuit, in strijd met het axioma van Euklides, dat juist vaststelt, dat het geheel groter is dan het deel. Bolzano nu, zag geen kans om deze moeilijkheden te overwinnen; dat gelukte eerst Georg Cantor.

Welke draagwijdte de begrippen „element", „verzameling" en „afbeelding" bezitten, dat is bekend: ze leiden — onafhankelijk van elk ordebegrip — tot het begrip, genaamd „machtigheid," of zoals Cantor het noemde, „kardinaalgetal," dat men aan elke klasse van onderling aequivalente [1]) verzamelingen toekent.

Cantor drukt het aldus uit: „Mächtigkeit von M heiszt der Allgemeinbegriff, der mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens

---

[1]) Het begrip aequivalentie (d.i. eeneenduidige betrekking) vindt men reeds in de eerste verzameltheoretische verhandeling van Cantor, Journ. f. Math. 77 (1883), blz. 242.

dadurch aus der Menge M hervorgeht, dasz von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird" [1]).

Op dit begrip laten zich de elementaire bewerkingen van de optelling en de vermenigvuldiging en de daarop berustende rekenwetten zonder uitzondering overdragen. De machtigheid van een verzameling — en dus in het bijzonder die van een oneindige verzameling — is de zuivere analogie van het aantalsbegrip voor eindige verzamelingen. Is men zich hiervan bewust, dan werpt zich onmiddellijk de vraag op, of de symbolen, die de kardinaal-getallen voorstellen, dan ook niet op soortgelijke wijze kunnen worden geordend als de natuurlijke getallen. Het antwoord op deze vraag, hoewel bevestigend, is geenszins eenvoudig te geven. De hiervoor benodigde grondslagen hebben we te danken aan Cantor; ze bestaan uit de opsomming van de vier elkaar uitsluitende mogelijkheden, die zich voor twee verzamelingen M en N en hun deelverzamelingen kunnen voordoen. Het bewijs, dat voor twee kardinaalgetallen minstens één van de drie relaties $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ of $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ geldt, levert de grootste moeilijkheid: men heeft een zeer diep liggende stelling over de welordening van een verzameling nodig. De vraag echter, of machtigheden steeds vergelijkbaar zijn in een zin, die de orderelatie voor eindige kardinaalgetallen insluit, kan bevestigend worden beantwoord.

De studie van de geordende verzamelingen in het algemeen is eveneens door Cantor voor het eerst ter hand genomen. De op de ordening berustende fundamentele begrippen heeft Cantor gedeeltelijk reeds in zijn „Grundlagen", evenals in het „Zeitschrift für Philosophie" uiteengezet; in zijn latere werken ondergingen ze een nauwkeuriger behandeling. Zijn beschouwingen voerden hem tot de begrippen ordetype en het transfinite ordinaalgetal, om enkele van de voornaamste te noemen.

Een ordetype stelt de gemeenschappelijke ordewet van geordend-aequivalente verzamelingen voor, of zoals Cantor zelf zegt: „Der Ordnungstypus oder Typus von M ist der Allgemeinbegriff, der sich aus M ergibt, wenn man nur von der Beschaffenheit der Elemente abstrahiert, die Rangordnung unter ihnen beibehält".

Wanneer we het werk, dat Cantor op dit terrein verrichtte, nagaan, dan wijzen we eerst op zijn indeling van de geordende verzamelingen naar de zg. ordetypen. Evenals de klassen van de aequivalente verzamelingen door symbolen, de kardinaalgetallen,

---

[1]) Mathematische Annalen 46 (1895), blz. 481.

werden aangeduid, zo duidt Cantor ook de ordetypen door aparte symbolen aan; voor deze symbolen zijn, evenals voor de kardinaalgetallen, optelling en vermenigvuldiging te definiëren; verdere details hierover moeten vanzelfsprekend in deze samenvatting achterwege blijven; het voorgaande moge er blijk van geven, dat in het ordetype dàt fundamentele begrip moet worden gezien, waarin de op de ordening betrekking hebbende wetten van de algebra en de meetkunde hun gemeenschappelijke uitdrukking vinden.

Onder de geordende verzamelingen komen er speciale voor, die zich door bijzonder eenvoudige wijze van ordening kenmerken en die men met de naam „welgeordend" aanduidt. Voor deze verzamelingen, waarvan Cantor in 1897 de algemene, welhaast klassiek geworden theorie bekend maakte [1]), gelden eenvoudige wetten, die ons in velerlei opzicht aan de ons vertrouwde eigenschappen van de natuurlijke getallenrij herinneren. Dat is dan ook de reden, dat het ordetype van een welgeordende verzameling op ons een minder vreemde indruk maakt dan het kardinaalgetal of het ordetype van een willekeurige verzameling. Onder een welgeordende verzameling verstaat men nl. een verzameling, waarvan elke (niet-lege) deelverzameling, dus ook de verzameling zelf, een eerste element bevat. Een dergelijke verzameling heeft dus niet alleen een eerste, maar ook een tweede, een derde element, enz., als tenminste de verzameling al niet na een kleiner aantal stappen is doorlopen. De grote betekenis, die de welgeordende verzamelingen hebben gekregen, is gelegen in het feit, dat de theorie van deze verzamelingen zich op geheel willekeurige verzamelingen laat overdragen. Ongeveer een halve eeuw geleden nl. is het strenge bewijs gegeven van een stelling, waarvan Cantor de juistheid reeds vermoedde, nl. dat de elementen van elke verzameling zich tot een welgeordende verzameling laten ordenen. Tot dit resultaat kwam eerst Zermelo in 1904. Het belang van de welgeordende verzamelingen schuilt in de eigenschap, dat twee welgeordende verzamelingen òf het zelfde ordetype bezitten, òf dat één van hen met een aanvangsstuk van de andere geordend-aequivalent is. Daaruit volgt nl. onmiddellijk de steeds mogelijke vergelijkbaarheid van welgeordende verzamelingen met betrekking tot hun kardinaalgetallen. De ordetypen van welgeordende verzamelingen noemt

[1]) Mathematische Annalen 49 (1897), blz. 207; de hier optredende begrippen en stellingen komen grotendeels al voor in Math. Ann. 21 (1883), blz. 545. Vergelijk ook: Zeitschrift für Philosophie, 92 (1887), blz. 240. Een uitvoerige behandeling geeft G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre.

men ter onderscheiding ordinaalgetallen, in het bijzonder die van oneindige welgeordende verzamelingen noemt men oneindige of transfinite ordegetallen. Kardinaalgetal en ordinaalgetal, twee begrippen, waarvan de oorspronkelijke betekenis voor het natuurlijke getal in enkele jaren is uitgebreid voor oneindige verzamelingen, zij het dan, dat het niet meer mogelijk is om beide soorten getallen steeds door dezelfde symbolenrij voor te stellen.

De eigenschappen betreffende welgeordende verzamelingen vertonen een uitgesproken asymmetrisch karakter. Deze asymmetrie is inderdaad een noodzakelijk gevolg van de definitie, waarin geeist wordt, dat de deelverzamelingen over een eerste element — en niet ook over een laatste element — beschikken. In dit verband is het de moeite waard om op te merken, dat een opbouw van de theorie van de eindige verzamelingen en van de natuurlijke getallen met de hulp van de welgeordende verzamelingen mogelijk is. Daarvoor wordt het begrip „dubbel-welgeordend" van een verzameling ingevoerd, d.w.z. de eigenschap, dat elke deelverzameling zowel een eerste als een laatste element bezit. Deze eis heft dus de genoemde asymetrie op en dan blijkt, dat niet alleen elke eindige verzameling te ordenen is tot een dubbel-welgeordende verzameling, maar dat omgekeerd ook elke dubbel-welgeordende verzameling eindig is.

Evenals de kardinaalgetallen laten ook de ordegetallen een ordening toe, maar deze ordening is veel doorzichtiger dan die van de kardinaalgetallen. Cantor heeft tenslotte een rij van symbolen afgeleid, die men een voortzetting van de gewone getallenrij door het oneindige heen kan noemen:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega . 2, \omega . 2+1, \ldots, \omega . 3, \ldots,$$
$$\omega . 4, \ldots, \omega . m+n, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots$$

Hiermede is een van hem zelf afkomstige gedachte, om de rij van de natuurlijke getallen voort te zetten, tot het einde toe volkomen duidelijk doorgevoerd. Hoe omvangrijk de welgeordende verzameling ook zijn moge, steeds is het mogelijk om de verzameling „af te tellen" d.w.z. met indices te voorzien, die dan weliswaar geen eindige getallen maar ordegetallen zijn.

Dat Cantor's creatie met de nodige scepsis werd ontvangen, behoeft nauwelijks betoog, te minder als men zich het protest van Gausz tegen het gebruik van een oneindige grootheid als een volwaardig iets herinnert. Dit uit 1831 daterende protest drukt duidelijk een horror infiniti uit, die gedurende lange tijd als een algemeen aanvaard beginsel gold, gesteund door de autoriteit van een man

als Gausz. De wiskunde had zich maar met eindige grootheden bezig te houden, het oneindig grote mocht — evenals het oneindig kleine — min of meer scherp omlijnd, desnoods in de wijsbegeerte zich in een kommervol bestaan verheugen, uit de wiskunde bleef het verbannen. Cantor viel de eer te beurt, de uitspraak van Gausz niet alleen te bestrijden, doch ook te weerleggen en het begrip van het oneindig grote het burgerrecht in de wiskunde te verschaffen. Het was niet alleen Gausz, maar ook tegen de uitspraken van figuren als Aristoteles, Descartes, Spinoza, Locke, Leibniz, ja zelfs tegen religieuze grondstellingen moest Cantor, bescheiden als hij was, zich verdedigen. Hoe duidelijk Cantor zich in een nog vroege periode van zijn arbeid reeds van het doel en het belang van zijn werk bewust was en hoe juist hij de uiteindelijke overwinning — ondanks alle tegenstand — voorzag, moge blijken uit de voorrede van een verhandeling van 1883:

„Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist."

„Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so grosze, dasz es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nötig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, dasz ich scheinbar fremdartige Ideen in meine Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung sondern die feste Überzeugung aussprechen, dasz diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, dasz ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgrösze mich stelle."

We moeten hiermede, hoe onvolledig ook het beeld van Cantor's creatie moge zijn weergegeven, deze periode achter ons laten en we zullen tenslotte de aandacht vestigen op een begrip, waarbij de orde ten nauwste betrokken is en dat inderdaad een nieuw tijdperk inluidt, nl. dat van de gedeeltelijke ordening.

De onderzoekingen van de laatste twintig jaren hebben een merkwaardig feit aan het licht gebracht, nl. dat men in verschillende takken van de wiskunde dezelfde eenvoudige en fundamentele betrekkingen tussen de elementen, waarmee men zich bezighoudt, ontmoet. Men komt ze tegen in de verzamelingsleer, in de groepentheorie, in de getallentheorie, in de projectieve meetkunde, in de topologie, in de waarschijnlijkheidsrekening, in de wiskundige logica, in de quantenmechanica enz. enz.

Het gaat hier in het bijzonder om de relatie van geheel tot deel of om andere relaties, die dezelfde formele eigenschappen hebben als eerstgenoemde. We weten nù, dat het juist diè relaties zijn, die aan de elementaire opbouw van al deze gebieden van de wiskunde ten grondslag liggen. Dat ligt ook wel enigszins voor de hand. Allereerst beperkt de betrekking van deel tot geheel zich natuurlijk allerminst tot de wiskunde. Vroeger echter beschouwde men de verschillende onderdelen van een object graag afzonderlijk om zich zodoende des te beter een beeld van het geheel te kunnen verschaffen, waarbij men dan over het hoofd zag, dat men door de kennis van de delen in het algemeen nog geen inzicht in het totaal krijgt. Tegenwoordig gaat de belangstelling meer uit naar de onderlinge samenhang, de „totaliteit" en de manier, waarop de delen daarvan afhankelijk zijn; de verklaring van een deel is onmogelijk zonder de beschouwing van het geheel. Iedereen heeft wel een idee omtrent „deel": een trappér is een deel van een fiets, het hoofd is een deel van het lichaam, een feestmaaltijd een deel van een feest, een spraakklank een deel van een woord. Maar welk gemeenschappelijk kenmerk bedoelen we dan, als we aan deze delen het deel-zijn toekennen? Zeker niet de weergave van het wezen dier dingen: een trapper is wat anders dan een hoofd en een hoofd is tenslotte geen feestmaaltijd. Het gemeenschappelijke ligt in de verhouding tot iets anders; het deel-zijn is geen eigenschap van het ding zelf; onvolledigheid is veel meer eèn eigenschap van elk deel, maar dat karakteriseert het deel niet. Wat het „geheel" betreft, ook hier geldt, dat het wezen van een ding nimmer het „geheel-zijn" kan bepalen.

Men ziet duidelijk, dat de inhouden van beide begrippen van elkander afhankelijk zijn. In tijdsorde zijn deel en geheel gelijk; dat volgt uit de begrippen: het ene kan niet bestaan zonder het andere. Ontologisch gaat het geheel vóór de delen, omdat het geheel de delen in hun deel-zijn bepaalt en niet andersom. Van het standpunt van de ordening in de zin van „rangschikking naar veelheid" bekeken laten we „deel" aan „geheel" vooraf gaan: het

deel met andere entiteiten stelt het geheel samen en ook in dit voorafgaan komt, ongeacht het wezen van de objecten, waarop ze worden toegepast, de verhouding van deel en geheel tot uitdrukking. En in déze betekenis acht de wiskunde een studie van deze relaties van belang, omdat het formalistische systeem, dat hieraan ten grondslag ligt een geldigheid bezit, onafhankelijk van de speciale betekenis van het deel. Eerst een twintigtal jaren geleden zien we voor het eerst een doelbewuste ontwikkeling van een algemene theorie over deze relaties in de wiskunde, nauwkeuriger gezegd: een studie van verzamelingen, waarvan de elementen onderling verbonden zijn door deze relaties. De eerste schreden op dit pad zijn van Dedekind (1900), die aan dergelijke verzamelingen de naam duaalgroep gaf; een systematische studie werd eerst veel later ondernomen, door Menger (1928), die de naam „systeem van dingen" bedacht, door G. Birkhoff (1933), die de voorkeur gaf aan de naam „lattice" en die over dit onderwerp zijn „Theory of lattices" schreef, door O. Ore (1935), die van „structure" spreekt evenals de Fransen, terwijl in de Duitse literatuur het woord „Verband" is ingeburgerd. Men moet een structuur (of een netwerk) opvatten als een verzameling S van elementen, die aan de volgende eisen voldoen:

1. S bevat paren elementen a en b, waarvoor een relatie $a \subset b$ (a gaat aan b vooraf) bestaat, zodanig, dat $a \subset a$, uit $a \subset b$, $b \subset a$ volgt $a = b$ en omgekeerd; uit $a \subset b$, $b \subset c$ volgt $a \subset c$. Op grond van deze voorwaarden noemt men S gedeeltelijk geordend. In vele gedeeltelijk geordende verzamelingen blijkt, dat voor elk paar elementen a en b uit S, al bestaat er ook geen orderelatie tussen beiden, een paar elementen bestaan met eigenschappen, die ons het recht geven om er de namen product en som aan te geven. Daarom worden de volgende voorwaarden gesteld:

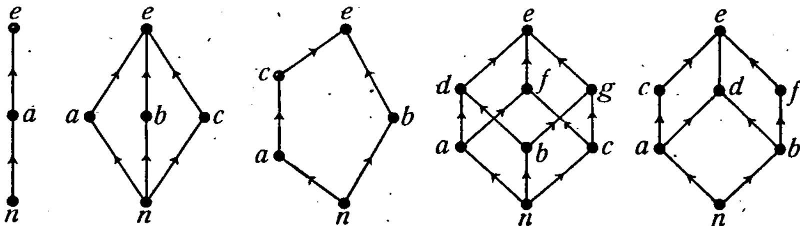
2. Voor elk tweetal elementen a en b bestaat een element $a \,.\, b$ van S, het product van a en b, zodanig, dat $a \,.\, b \subset a$, $a \,.\, b \subset b$ en dat elk element c, dat zowel aan a als aan b voorafgaat, ook aan hun product voorafgaat;

3. Voor elk tweetal elementen a en b van S bestaat een element $a + b$, eveneens van S, genaamd de som, zodanig, dat zowel a als b aan $a + b$ voorafgaat, terwijl elk element c, dat door a zowel als door b wordt voorafgegaan, ook door hun som wordt voorafgegaan. De voorbeelden van verzamelingen met deze eigenschappen liggen voor het grijpen:

De deelverzamelingen van de ruimte voldoen aan alle eisen; de verzameling van alle ondergroepen of van alle normaaldelers van

een groep G; in de wiskundige logica de verzameling van alle mogelijke uitspraken. Deze laatste structuur is bovendien de eerste structuur, die het onderwerp van studie was, en wel door Boole (1847) en door Peirce (1867).

Essentieel is dus hier het uitstrekken van het gebruik van de algebra tot de logica; men kan het gehele algebraïsche apparaat op de logica toepassen. Waar echter de logica in grote mate belang bij heeft, dat is de studie van de orderelaties. Het hoeveelheidsbegrip treedt in deze speciale algebra geheel op de achtergrond: dàt openbaart zich uitsluitend in de begrippen niets (of leeg) en geheel. De oorzaak van het verschil tussen de formules van de „wiskundige" algebra en die van de „logica-algebra" is in het feit gelegen, dat de logica de veelheid abstraheert: $a + a = a$ en $a \cdot a = a$, de herhaling geeft niets anders dan hetzelfde, er bestaat geen veelvoud, er bestaan geen machten. In de rekenwijze van de logica is het dus slechts de verscheidenheid, die in het oog wordt gevat. We keren terug tot de structuur in het algemeen en ik zou allereerst willen wijzen op de dualiteit, die er bestaat op grond van de gemaakte afspraken 1, 2 en 3: alle uitspraken blijven juist, wanneer men de begrippen „som" en „product" verwisselt en tegelijkertijd elke orderelatie omkeert. Doorzichtig, maar ook van groot belang, zijn de zg. eindige structuren. Voor dergelijke structuren is er nl. een eenvoudige middel om de relaties, die er tussen de elementen bestaan, tot uitdrukking te brengen. Men duidt de elementen nl. door verschillende punten aan, elk voorzien van een letter, en men verenigt twee elementen a en b door een lijnsegment wanneer tussen a en b de relatie $a \subset b$ bestaat en wanneer er bovendien geen van a en b verschillend element c bestaat, dat aan de relatie $a \subset c \subset b$ voldoet. U ziet hier enkele voorbeelden van structuren; (zie fig.).



Men krijgt pas belangrijke structuren, wanneer men aan de reeds genoemde voorwaarden nog verdere toevoegt. Hiervoor kan ik echter beter naar de literatuur verwijzen.

Geachte lezers, ik heb getracht om voor U in een kort bestek de begrippen „orde" en „ordening" van verschillende zijden toe te lichten. Ik ben mij bewust, dat dit alles synthese is, het tegengestelde van de analyse, die ik hier heb te onderwijzen. Maar ook in de wiskunde hebben deze twee tegengestelden elkander voortdurend nodig: het geheel kan slechts gekend worden uit de delen, zoals de delen slechts gekend kunnen worden uit het geheel. Ons verstand, drager van het ordenend vermogen, is het instrument, dat door middel van de ordening de mens de bevrediging van zijn idealen tracht te schenken; idealen, hetzij op stoffelijk of op geestelijk gebied. De rangschikkende orde in het dagelijkse leven, evenals de maatschappelijke orde, onmisbare elementen voor alle welvaart. Maar ook de orde in het heelal, grondslag van alle natuurwetenschap, de wetenschap, die onder de zichtbare en onzichtbare oorzaken en gevolgen een oneindig aantal kleine wijzigingen ontdekt, die we, naarmate de analyse vordert, hoe langer hoe volkomener in elkander voegen, de wetenschap, die we onder de naam van „orde in de natuur" trachten te vervolmaken, gemeenschappelijk en in vrijheid, tot heil van de mens, want voor hem gelden nog steeds de woorden van P. C. Hooft:

„Geluckig die d'oorsaecken van de dingen
Verstaet en hoe sij vast zijn onderlingen
Geschakelt . . ."

FANTASIE VAN PUNT TOT PUNT

door

Dr J. DE GROOT. [1])

Een gastronoom, tevens wiskundige — zijn naam zal ik hier verzwijgen — heeft eens gezegd: „Het gebied der wiskunde is te vergelijken met een prachtige dis, voorzien van tal van uitgelezen gerechten. De spijzen bezitten evenwel de volgende merkwaardige eigenschap: men kan er pas van genieten, nadat ze verteerd zijn."

Dit is wel de eenvoudigste verklaring die men geven kan voor het feit, dat de wiskunde velen als een steen op de maag ligt, waarbij men nog stilzwijgend voorbij gaat aan de vaak langdurige pijnen, die aan het inslikken van deze wiskundestenen, hier ter stede voornamelijk bekend onder hun nuchtere afkortingen P_1 en P_2, gepaard gaan.

Deze stand van zaken, die niet te ontkennen valt, leidt echter helaas tot betreurenswaardige misverstanden. Verlaten we de grote schare van diegenen, voor wie de woorden algebra en abracadabra dezelfde betekenis bezitten, dan zijn we waarschijnlijk aangeland bij hen, die wiskunde en rekenen als synoniemen beschouwen. Het bestaan van de meetkunde is deze lieden wellicht bekend. Maar helaas: hier schittert de naam van Pythagoras als een ster in het luchtledige.

Wenden we ons vervolgens tot de specialisten der diverse vakgebieden zelve. De ontwikkeling en differentiatie van de verschillende wetenschappen in de laatste honderd jaar maken het onmogelijk een universele kennis op al deze terreinen te verkrijgen. Dit geldt evenzeer, indien men zich beperkt tot de exacte wetenschappen.

Helaas heeft dit differentiatieproces zich verder voortgezet binnen de afzonderlijke wetenschappen zelve. En dit geldt in zeer sterke mate voor de wiskunde. Het is heden ten dage ook voor een buitengewoon begaafd mathematicus vrijwel onmogelijk grootmeester te worden op de talrijke wapenen, die de huidige wiskunde bezit. De ontwikkelde leek denkt nog in algebra en meetkunde. Men kan deze het best vergelijken met een vergeten holenbewoner,

---

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar aan de technische hogeschool te Delft, op Woensdag 16 Maart 1949.

die — in de eeuw van de atoombom — met voldoening constateert, dat hij over een knots en een speer beschikt.

Laat ik pogen U dit duidelijk te maken, maar dan liever aan een wat meer poëtisch beeld. Het scheppende werk van de wiskundige is te vergelijken met de dichterlijke arbeid van een poëet. Misschien glimlacht U om deze uitspraak. „Is er iets zo dor en droog als de wiskunde?"

Toch is deze vergelijking voor een groot deel juist. De Franse dichter Paul Valéry en de Franse wiskundige Poincaré — deze namen spreken voor zichzelf — hebben eens naar hun beste weten een beschrijving gegeven van de geestelijke processen, die gepaard gingen met hun scheppingen. Deze bleken vrijwel parallel te lopen. Hoewel een gedicht en een wiskundestelling feitelijk, quantitatief, niets met elkaar te maken hebben, spelen bij hun ontstaan qualitatief-gelijke geestelijke processen een rol. Een gedicht ontstaat uit de oorspronkelijke idee, door deze te hullen in een gewaad waaraan strenge eisen zijn gesteld: taal, maat, rijm; een wiskundestelling ontstaat op analoge wijze, maar het geschapene moet dan gewrongen worden in een keurslijf van logica.

Natuurlijk, ik weet het, deze voorstelling is veel te simplistisch; er is een wisselwerking en een strijd tussen de wezenlijke inhoud van het geschapene en de vorm waarin deze inhoud moet passen. Ook dient men wel te beseffen, dat de eisen, gesteld aan inhoud en vorm, kunnen variëren in de loop der tijden: de taal verandert, er bestaan gedichten zonder rijm. Zo zijn er wiskundes voor verschillende soorten van logica: sommige wiskundes zijn in de mode, andere worden vergeten.

Houden we nog even het beeld vast, waarbij we de wiskunde vergelijken met de poëzie. Het rekenen op de lagere school staat dan gelijk met het leren van het alfabet en het vormen van eenvoudige woorden; op de middelbare school leert men eenvoudige zinnetjes in prozavorm opschrijven, maar alleen in het Nederlands. Begaafde leerlingen maken soms een Sint Nicolaas-rijmpje. We komen nu tot de wiskundestudie aan een universiteit. Men leert daar tal van talen en leest de poëzie, die in die talen is geschreven door talentvolle dichters. De toegepaste wiskunde kan men dan vergelijken met het proza. Aan de vorm worden minder eisen gesteld, waardoor men daarentegen aan bruikbaarheid wint. De examens P_1 en P_2 hier in Delft kunnen, voorzover het de wiskunde betreft, ieder vergeleken worden met een kort opstel over een eenvoudig onderwerp, en wel in twee talen, corresponderend met de analyse en de meetkundige vakken.

Is het nu verwonderlijk, dat er vreemde opvattingen over de wiskunde bestaan? Wie kan de dialogen van Plato bewonderen, indien hij alleen de Griekse letters kent? Kan iemand met een kennis van duizend woorden basic-Engels van Hamlet genieten? Maar Plato en Shakespeare kunnen vertaald en daardoor — zij het gedeeltelijk — begrepen worden. Wiskunde laat zich echter even slecht vertalen als een gedicht en populariseren is zeer bezwaarlijk. Van andere wetenschappen, biologie, medicijnen, enz., kan men tenminste als leek een aantal resultaten begrijpen of aanvoelen; bij de wiskunde is dit vrijwel onmogelijk.

Ook de wiskundigen onderling beginnen elkaar langzamerhand slecht te begrijpen; het aantal wiskunde-talen is zó groot, dat het op een Babylonische spraakverwarring gaat gelijken. Het aantal wiskundige gedichten in ieder van die talen — zowel goede als slechte — is enorm, maar vrijwel niemand leest ze, uitgezonderd die van enkele dichters van naam. Dezelfde misvattingen en bekrompen opvattingen, die de leek ten aanzien van de wiskunde heeft, bezitten vele wiskundigen tegenwoordig helaas ook ten aanzien van gebieden der wiskunde, die hen niet interesseren of waarvoor ze geen aanleg bezitten.

Nadat ik U in het voorgaande uiteengezet heb, dat slechts moeilijk begaanbare wegen binnenleiden in de gebieden der wiskunde, rust op mij thans de taak tenminste de schijn aan te nemen, dat popularisering van de wiskunde mogelijk is.

Laten we beginnen met een probleem, dat nauw verband houdt met de werkelijkheid en in de hongerwinter van '45 zelfs actueel genoemd kon worden: het probleem van het belegde broodje, of, met wat meer standing uitgedrukt: het sandwich-probleem.

Stel U voor een sneetje brood zonder boter, belegd met een stuk kaas. Gevraagd dit broodje met kaas met een rechte verticale messnede door te snijden, zodat de hoeveelheden brood en kaas gehalveerd worden. Meer abstract kan men dit sandwichprobleem als volgt formuleren: men denke zich in het platte vlak twee figuren A en B, ieder met een bepaalde oppervlakte. Bestaat er een rechte lijn in dit platte vlak, die zowel de oppervlakte van A als die van B halveert?

Het antwoord luidt bevestigend; zelfs mogen A en B ieder uit een groot aantal los van elkaar liggende stukken bestaan, m.a.w. men kan ook duizend broodjes met kaas met één snede eerlijk in tweeën delen. In dit geval wordt de oplossing echter veel lastiger. We veronderstellen daarom gemakshalve, dat oppervlakte A uit één stuk bestaat, maar van overigens willekeurige vorm is. Voor B

zal hetzelfde gelden. A en B liggen totaal willekeurig ergens in het vlak. Men behoeft dus het plakje kaas niet op het broodje te leggen.

De mogelijkheid van een oplossing berust in wezen op een zeer eenvoudig principe, dat iedereen van zelfsprekend vindt. Laten we aannemen, dat U 's avonds, voor het naar bed gaan, de buitenthermometer afleest, die + 4° C aanwijst. De volgende morgen wijst de thermometer — 3° C. Dan zult U ervan overtuigd zijn, dat er 's nachts een tijdstip is geweest waarop de thermometer juist 0° C aanwees. Dit berust hierop, dat het rijzen of dalen van de kwikspiegel in de thermometer als het ware niet plotseling met een abrupte sprong kan geschieden, maar continu verloopt. Maakt men een grafiek van de temperatuur in het beschouwde tijdsinterval, wat in De Bilt trouwens geregeld geschiedt, dan krijgt men wat men noemt een continue kromme. Deze kromme brengt dan in beeld de temperatuur in afhankelijkheid van de tijd, of, zoals de wiskundige zegt, de temperatuur als functie van de tijd. Op een bepaald tijdstip was de temperatuur + 4° C, op een later tijdstip — 3° C. Dan wordt iedere temperatuurswaarde, d.w.z. iedere functiewaarde, tussen + 4° C en — 3° C op minstens één tijdstip aangenomen. Zuiver wiskundig geformuleerd luidt dit beginsel: een continue functie, die zowel de waarde p als de waarde q aanneemt, neemt ook iedere waarde tussen p en q aan.

Deze tussenwaardestelling voor continue functies werd door wiskundigen van enkele eeuwen geleden als een trivialiteit aangenomen. Tegenwoordig ziet men in, dat het niet alleen van belang is het begrip continue functie exact te formuleren — wat ik hier niet zal doen — maar ook om dit tussenwaardeprincipe te bewijzen, d.w.z. terug te voeren tot een vaststaand aantal eenvoudige aannamen, axioma's genoemd. Hierdoor alleen namelijk wordt het mogelijk — nog geheel afgezien van wiskundige strengheid — in gecompliceerde en onoverzichtelijke gevallen een dergelijk principe tot zijn volle recht te doen komen, casu quo verder uit te bouwen. Juist ons sandwichprobleem nu is een treffende illustratie van het belang van dit tussenwaardeprincipe. Voor de oplossing van het algemene sandwichprobleem fungeert dit beginsel als sluitstuk van het bewijs. Voor het geval, dat wij onderzoeken, waarbij oppervlakte A en oppervlakte B ieder uit één stuk bestaan, levert de herhaalde toepassing van het tussenwaardeprincipe direct een oplossing.

Immers, denk U een rechte lijn, zodat oppervlakte A geheel rechts van die lijn ligt. We verschuiven nu deze lijn evenwijdig aan zichzelf naar rechts. Tenslotte bereikt de lijn een stand, waarbij

oppervlakte A geheel links van de lijn ligt. Bekijkt men bij iedere stand van onze lijn het gedeelte, dat van A wordt afgesneden, gelegen rechts van onze lijn, dan constateren we het volgende: in de aanvangsstand is de „afgesneden" oppervlaktewaarde gelijk aan de oppervlakte van A, in de eindstand is deze waarde nul. De afgesneden oppervlaktewaarde is afhankelijk, en wel continu afhankelijk van de afstand, waarover we verschoven hebben; er is dus een tussenstand van onze lijn, waarbij juist de helft wordt afgesneden.

Dit alles is ook weer intuïtief duidelijk; wil men in de practijk een brood doorsnijden, dan doet men hetzelfde: men beweegt de hand met het mes heen en weer tot een naar schatting juiste verdeling is gevonden.

Deze verdeling van A in twee delen van gelijke oppervlakte is mogelijk in iedere willekeurige richting, d.w.z., bij iedere lijn is steeds een evenwijdige lijn L te vinden, die A halveert. We beschouwen nu al deze lijnen L die A halveren, voor alle mogelijke richtingen. Was A b.v. een cirkeloppervlak, dan waren de lijnen L juist alle middellijnen. Verder denken we ons ergens naast A een vaste rechte lijn getekend en beschouwen de hoek φ, die een halveringslijn L van zoëven met deze vaste rechte maakt.

Nu blijken de lijnen L continu af te hangen van de hoeken φ, die deze met onze vaste rechte maken. Dat betekent: bij ongeveer gelijke hoeken φ behoren ongeveer samenvallende lijnen L, die ieder A halveren; kortweg, L is een continue functie van de hoek φ.

Neem zo'n lijn L in gedachten. L halveert oppervlakte A; zou L toevallig ook B halveren, dan was het sandwichprobleem reeds opgelost. In het algemeen zal L echter B niet halveren, zodat aan de ene kant van L meer dan de helft van B zal liggen en aan de andere kant van L de rest, dus minder dan de helft van B. Laten we zeggen, om onze gedachten te bepalen, dat aan de ene zijde het drievierde gedeelte en aan de andere zijde het éénvierde gedeelte van B ligt. Veranderen we de hoek φ en dus de lijn L een weinig, dan zal ook aan de ene kant van de nieuwe L — laten we zeggen — iets minder dan het drievierde gedeelte van B liggen. Algemeen uitgedrukt: het oppervlaktegedeelte van B, gelegen aan de ene kant van een lijn L, hangt continu af van de bijbehorende hoek φ.

Stelt U zich b.v. voor, dat L loopt van links beneden naar rechts boven. L halveert A, zoals we weten, en we bekijken het stuk, dat L afsnijdt van B en wel het links boven gelegen stuk. Laat dit het drievierde gedeelte zijn. Draait L een weinig, d.w.z. verandert φ enigszins, dan verandert het van B afgesneden gedeelte ook, maar

dit geschiedt geleidelijk, continu. Dit draaiingsproces van L denken we ons voortgezet; tenslotte is L 180 graden omgedraaid en weer met zichzelf tot dekking gekomen; dan is de hoek φ met 180 graden vermeerderd. Voor het eenvoudige geval, dat de lijnen L de middellijnen van een cirkel zijn, betekent dit dus, dat de middellijn PQ 180 graden gedraaid is en nu met zichzelf tot dekking komt, dus PQ valt op QP. Het oorspronkelijk links boven gelegen stuk, dat L van oppervlakte B afsneed, is geleidelijk veranderd en na 180° draaiing van L het rechts onder gelegen stuk geworden, dat deze zelfde L van B afsnijdt. Het eerste stuk was ¾ B; het laatste ¼ B. Dit geschiedt in continue afhankelijkheid van de hoek φ. Volgens het tussenwaardeprincipe is er dus een waarde van φ en een bijbehorende lijn L, die juist de helft van B afsnijdt. L halveert dus B; bovendien halveerde iedere L oppervlakte A. De gevonden L levert dus de oplossing van het sandwichprobleem. Ons broodje met kaas is derhalve door een rechte verticale snede in twee gelijke delen te verdelen.

We hebben nu bewezen, *dát* het kan. Hoe de verdeling in feite uitgevoerd dient te worden, is een tweede. Daar de ervaring leert, dat iedere verdeling in onze eindige wereld aanleiding geeft tot twisten, ga ik hieraan liever stilzwijgend voorbij.

Het sandwichprobleem, uitgesproken voor twee oppervlakken in het platte vlak, kan men generaliseren voor lichamen in de ruimte. In dat geval vindt men: gegeven drie willekeurige lichamen A, B en C in de ruimte, waarbij ieder van die lichamen uit meerdere stukken mag bestaan; het is mogelijk een plat vlak aan te brengen, dat ieder der drie lichamen A, B en C halveert. Bij een eerlijke verdeling van onze aarde in twee machtssferen met behulp van een vlak door het middelpunt kan men dus bovendien nog twee eisen stellen: de bevolking van ieder der beide delen kan even groot zijn en deze bevolkingen kunnen ieder over een gelijke hoeveelheid uranium beshikken. Of ze hiermede erg tevreden zullen zijn, is een tweede. Laten we echter bedenken, dat er al sinds de dagen van Empedocles, toen men „slechts" vier elementen, lucht, water, vuur en aarde, onderscheidde, geen zowel eenvoudige als eerlijke verdeling meer mogelijk is.

Het aantonen van de mogelijkheid ener dergelijke verdeling voor drie lichamen is allesbehalve eenvoudig. Men maakt daarbij gebruik van diepgaande, zogenaamd topologische hulpmiddelen. De topologie is een deel van de meetkunde, dat eerst in deze eeuw tot grote ontwikkeling is gekomen. Enerzijds staat deze tak der wiskunde door grote abstractheid ver van de werkelijkheid af,

terwijl anderzijds qua probleemstelling de toepassingsmogelijkheden veel groter zijn of althans behoren te zijn dan bij tal van andere onderdelen van de meetkunde.

Het is niet mijn bedoeling uitvoerig op deze kwestie in te gaan, maar ik wil U althans enigszins duidelijk maken, waarom het hier gaat.

Denken we ons een aantal kleine, maar intelligente schepseltjes, die, gezeten op een rubberband van een rijdende auto — maar dan niet op de reserveband — meetkunde pogen te bedrijven. De gewone Euclidische schoolmeetkunde heeft voor deze wezentjes weinig betekenis, want een driehoek b.v. verandert voortdurend van vorm en grootte en zijn hoeken zijn niet constant. Beschouwingen over congruente driehoeken zijn daarom voor deze wezentjes — vanuit practisch oogpunt bezien — zinloos.

Is er toch een stille piekeraar, genaamd Euclides, onder deze rubberbewoners, die de Euclidische meetkunde opbouwt, maar dan noodzakelijkerwijze abstract, axiomatisch, dan zal deze door practici en technici uitgekreten worden voor een fantast en ongevaarlijke dwaas. Daarentegen zullen de ingenieurs uit dit wereldje interesse hebben voor het verschil tussen een cirkelvormige figuur en een figuur in de vorm van een acht, want door deformaties van de bandoppervlakte kan wel een driehoek in een cirkel, maar nooit een driehoek in een acht worden getransformeerd. Zij drukken dit uit door te zeggen, dat de cirkel en de acht-figuur topologisch verschillend zijn, maar dat de cirkel en de driehoek topologisch aequivalent zijn. In plaats van het begrip congruent uit de schoolmeetkunde treedt dus nu het begrip topologisch aequivalent. De topologie is de dagelijkse meetkunde der rubberbewoners.

Iedere rijdende auto komt evenwel tot stilstand; het ophouden van de omwentelingen van ons wiel betekent tevens een omwenteling in de wereld en geest van onze rubberbewoners, want nu heeft plotseling de Euclidische planimetrie, althans op de ongeveer vlakke bandgedeelten, practische zin en betekenis gekregen; de elementen van Euclides worden herontdekt, afgestoft en Euclides wordt als genie vereerd.

De bedoeling van dit kleine verdichtsel zal U duidelijk zijn, en wel door de kwestie om te keren. Overal waar in de natuur deformaties optreden is de bijbehorende wiskundige achtergrond specifiek topologisch. Daar de problemen, die hieruit voortvloeien, meestal onoplosbaar zijn of waren, poogt men de gegeven problemen te approximeren door andere, die wel in de een of andere wiskundige theorie passen, b.v. door differentieerbaarheidsvoorwaarden aan te

nemen, hoewel die in concreto niet gelden. De ontwikkeling van de topologie nu zal de wiskundige in staat stellen het benaderde probleem steeds meer te doen gelijken op het in werkelijkheid gegeven probleem.

Laten we ons niet te veel verdiepen in algemene beschouwingen, maar tot een tweede en laatste onderwerp overgaan, dat ik met U wil behandelen. Het sandwichprobleem handelde over oppervlakken en inhouden. Nu willen we het niet meer hebben over dergelijke grove materialistische begrippen, maar ons wenden tot een idealisering, namelijk tot het begrip „punt".

Wat is een „punt"? Het antwoord zal voor velen verschillend luiden. Ik denk b.v. aan die lichtelijk bijziende taalgeleerde, die in een unieke Oosterse tekst zijn aandacht concentreerde op één bepaalde punt, namelijk op een passage waarin een teken in de vorm van een punt voorkwam, dat er volgens hem niet behoorde te staan. Inderdaad veranderde het weglaten van deze punt de betekenis van de gehele zin. De geleerde schreef daarop, zoals te doen gebruikelijk, gedurende tien jaren aan een wetenschappelijke verhandeling van 300 pagina's, waarin onomstotelijk bewezen werd, dat het voorkomen van genoemde punt op een fout, waarschijnlijk een schrijffout, berustte. Na enige jaren werden evenwel nog enkele handschriften ontdekt, waarin dezelfde tekst, maar nu zonder de bewuste punt, voorkwam. Deze werden vergeleken met het handschrift van onze geleerde; het bleek, dat de gewraakte punt het eenvoudige gevolg was van de misdragingen van een vlieg.

Men kan uit dit verhaal deze lering trekken: wees voorzichtig in de omgang met punten; ze kunnen verschillende metamorphosen ondergaan. Dit is zeker het geval met het wiskundige begrip punt. Soms treedt een punt op als een abstract begrip, dat slechts heeft te voldoen aan een aantal axioma's, die men op talloze wijzen kan variëren.

De punten waarover wij het nu zullen hebben, zijn de gewone punten van de schoolmeetkunde, die tezamen het Euclidische platte vlak vormen. We gaan pogen een gewoon meetkundevraagstukje op te lossen. Gewoon in deze zin, dat iedere intelligente H.B.S.-er uit de tweede klas het vraagstuk moet kunnen begrijpen. De opgave zelf is echter, zoals U zult horen, niet van de gebruikelijke soort. Onze opgave luidt als volgt: gegeven een cirkelschijf C, d.w.z. een cirkel tezamen met zijn inwendige. Vraag: is het mogelijk deze cirkelschijf C te verdelen in twee congruente delen?

Zoals U weet zijn twee figuren per definitie congruent, indien men de ene figuur zó kan verplaatsen, dat hij juist

op de andere past. Congruente figuren zijn dus als het ware gelijke figuren.

De vraag was: kan de cirkelschijf C verdeeld worden in twee onderling congruente delen A en B, die niets gemeen hebben; dus C = A + B, A en B congruent, A en B geen punt gemeen.

De eerste poging tot een oplossing is natuurlijk deze: trek een middellijn, dan hebben we twee halve cirkelschijven en dat zijn juist de congruente delen A en B. Deze oplossing is evenwel onjuist, want de cirkelschijf C moet verdeeld worden in twee delen A en B, die geen enkel punt gemeen hebben, terwijl bij een verdeling van C in twee halve cirkelschijven A en B, deze een middellijn gemeenschappelijk hebben, wat ongeoorloofd is. Geeft men evenwel A de middellijn cadeau, dan heeft de — laten we zeggen — linkercirkelhelft A dus een behoorlijke rand, bestaande uit een halve cirkel en een middellijn, maar de rechter-cirkelhelft B bezit slechts een gedeeltelijke rand, namelijk een halve cirkel, en is naar links „open", daar de middellijn niet tot B behoort. Bij deze verdeling zijn A en B niet congruent meer.

Men kan nu als volgt verder redeneren: geef dan aan A van de verticale middellijn de bovenste helft en aan B de onderste helft, dan worden A en B toch congruent. Dit is echter ook onjuist, want nu weten we ons met het middelpunt van de cirkelschijf geen raad, daar dit niet aan A en B tegelijk kan worden toegekend. Verdeling van de cirkelschijf door trekken van een middellijn en eerlijk opdelen hiervan tussen A en B blijkt onmogelijk te zijn. Hieruit trekken velen de conclusie, dat het dan *dus* onmogelijk is de cirkelschijf in twee congruente delen te verdelen. Inderdaad is dit onmogelijk, maar deze conclusie zelf is niet steekhoudend, want men behoeft niet te beginnen met een middellijn te trekken, zodat het a priori niet uitgesloten is, dat op andere wijze toch nog een verdeling in congruente delen tot stand kan komen.

We zijn derhalve weer bij ons uitgangspunt teruggekeerd. Ik heb dit vraagstukje aan een aantal mensen, zowel wiskundigen als niet-wiskundigen, voorgelegd en tal van aardige en amusante antwoorden ontvangen. De mannelijke niet-wiskundige antwoordt aanvankelijk in doorsnede aldus: „O, heel eenvoudig, je neemt een mes en je snijdt de schijf doormidden." We hebben zo juist gezien, dat deze oplossing onjuist is. Verscheidenen zien tenslotte de onjuistheid van hun beschouwing in, vinden het probleem dan langzamerhand ergerlijk en geven het op.

Anderen, vooral oudere personen, verdedigen hun oplossing òf ontkennen het bestaansrecht van het probleem, waarbij vage

voorstellingen aangaande het begrip punt zelfs aanleiding kunnen geven tot langdradige mystieke beschouwingen over oneindig klein en oneindig groot. Een juiste oplossing van vrouwelijke kant heb ik helaas niet kunnen bemachtigen. Het begint ongeveer net als zoëven bij de mannelijke helft, maar nu niet met een mes, maar in de trant van: „Nou, ik geloof toch wel, dat ik een koekje doormidden kan breken"; onder het consumeren van een partij doormidden gebroken koekjes wordt dan het probleem vergeten.

Toch is de oplossing niet moeilijk. De eenvoudigste oplossing, die verschillende wiskundigen mij gaven, is als volgt: veronderstel een ogenblik, dat het *wel* mogelijk is onze cirkelschijf C te verdelen in twee congruente delen, en wel in een wit deel A en een zwart deel B. Het middelpunt van de schijf kan slechts tot één van beide delen behoren; laten we zeggen dat het tot het witte deel A behoort. Het witte deel A kan op het daarmede congruente zwarte deel B geplaatst worden. Laat het witte middelpunt M daarbij terecht komen op het zwarte punt M′ uit B.

M was het middelpunt der schijf; dit betekent dat ieder punt der schijf, dus ook van A, op een afstand van M ligt, hoogstens gelijk aan de straal. A werd op B geplaatst, waarbij punt M op M′ terecht kwam, dus ligt ieder punt van B op een afstand van M′, hoogstens gelijk aan de straal. Stel U nu behalve de oorspronkelijke cirkelschijf met middelpunt M een tweede met dezelfde straal voor, maar nu met M′ als middelpunt; daarbinnen moet dan wel het zwarte deel B liggen, m.a.w. B ligt in het gemeenschappelijke gedeelte der beide schijven. Van de oorspronkelijke schijf blijft dus een maanvormig gedeelte over, dat geheel tot de witte verzameling A moet behoren. Indien U zich dit maanvormige gedeelte goed kunt voorstellen, ziet U dat dit witte maantje twee diametrale punten bevat, d.w.z. A bezit twee punten op een afstand gelijk aan de middellijn. Dit is evenwel voor een willekeurig tweetal zwarte punten uit B niet het geval, daar het gemeenschappelijke deel der cirkelschijven hiervoor te klein is. A en B zijn derhalve niet congruent en er is dus een tegenspraak bereikt, waarmede uit het ongerijmde is bewezen, dat de verlangde verdeling in congruente delen onmogelijk is.

Men kan vervolgens hetzelfde probleem stellen niet voor een cirkelschijf, maar voor een willekeurige figuur, die een middelpunt bezit, b.v. voor een rechthoek of een ellipsoïde. Dit probleem lijkt echter van zeer gecompliceerde aard en is onopgelost.

Wellicht hebben sommigen van U bij zichzelf de opmerking gemaakt, dat hier weer eens de typische wiskundige aan het woord is, die een bewijs wil hebben van iets, dat zonneklaar is; de uit-

zonderlijke rol van het middelpunt in een cirkelschijf maakt het immers onmogelijk deze laatste te verdelen in twee congruente delen, indien het middelpunt slechts tot één van beide delen mag behoren. Hier is evenwel een waarschuwend woord op zijn plaats. Wat zegt U immers van het volgende: er bestaan in het platte vlak figuren A en B, die onderling congruent zijn, terwijl bovendien A congruent is met de som van A en B, m.a.w. door een geschikt gekozen verplaatsing van A bedekt A niet alleen zichzelf, maar ook nog een buiten A gelegen figuur B! Dat de figuren A en B in dit geval ieder zeer pathologische verzamelingen van punten moeten zijn, spreekt wel vanzelf; de mogelijkheid hiervan maant echter wederom tot voorzichtigheid bij het omgaan met punten en kweekt — hopen we — bescheidenheid en zelfcritiek bij de beoefenaren der wiskunde.

Ik wil besluiten met een enkele opmerking. Het vermelden van deze curiositeit mag U niet in de waan brengen, dat deze kenmerkend is voor de hoogste of uitnemendste prestaties der wiskundigen. Integendeel , het opsporen van de wetmatigheden en de ordening van terreinen, die de wiskunde bestrijkt, is en blijft hoofddoel. Wiskundige curiositeiten zijn waarschuwingsborden. In ons geval is dat waarschuwingsteken: pas op met het congruentiebegrip: schijnbaar evidente opvattingen hierover kunnen zelfs onjuist zijn.

VAN DE PERSONEN.

Dr. F. Loonstra is benoemd tot professor aan de Technische Hogeschool te Delft. Hij studeerde aan de universiteit van Amsterdam en promoveerde in 1941 op proefschrift getiteld: „Analytische Untersuchungen über bewertete Körper". Na enige jaren leraar te zijn geweest,werkte hij van 1946—1948 aan het Mathematisch Instituut te Amsterdam. Eind 1948 volgde zijn benoeming tot lector in de analyse aan de universiteit van Amsterdam. In de „Proceedings" van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen verschenen verhandelingen van Dr. Loonstra.

Dr. J. de Groot, Hoogleraar aan de T. H. te Delft.

Dr. de Groot is geboren 7 Mei 1914 te Garrelsweer.

1933—1939 studie aan de Rijksuniversiteit te Groningen.

1939 leraar te Coevorden, 1941 Den Haag.

1942 promotie bij Prof. Dr. G. Schaake (cum laude) over „Topologische studiën".

1946 medewerker Math. Centrum.

1947 lector aan de Universiteit van Amsterdam.

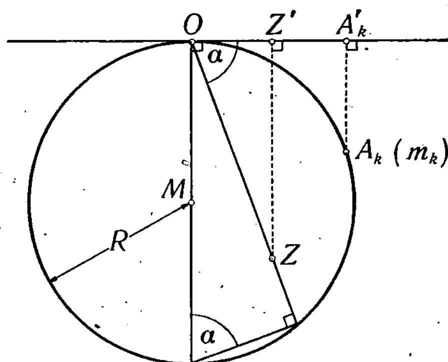
1949 hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica aan de T. H.

Zijn wetenschappelijke werkzaamheid ligt grotendeels op het gebied van de topologie van de verzamelingen.

KORRELS.

XCII. EEN PHYSISCHE SLINGER.

Op een gewichtsloze, cirkelvormige draad liggen een eindig of oneindig aantal stoffélijke punten A_1, A_2, . . . opv. met massa's m_1, m_2, . . . De verdeling van deze massapunten op de cirkel (straal R) is bepaald, doch volkomen willekeurig. Als deze draad in een van z'n punten, b.v. O, wordt opgehangen en men laat de cirkel om O, in z'n vlak, zonder wrijving in het ophangpunt, slingeren, dan heeft men een z.g. physische slinger. Men kan nu bewijzen, dat de gereduceerde slingerlengte, d.i. de lengte van de mathematische slinger, die synchroon is met deze physische slinger, juist gelijk is aan de lengte van de koorde, die uit O getrokken wordt door het zwaartepunt van het stelsel der stoffelijke punten.



Is I het massa-traagheidsmoment van het stelsel m_1, m_2, . . . t.o.v. de as door O loodrecht op het vlak van de cirkel en is Z het zwaartepunt van dit stelsel (zie fig.), dan is naar bekend de gereduceerde slingerlengte van de physische slinger gelijk aan

$$l = \frac{I}{OZ \cdot \Sigma m_k}.$$

Is A_k' de projectie van A_k op de raaklijn in O aan de cirkel, dan is

$$I = \Sigma OA_k^2 \cdot m_k = 2R \, \Sigma A_kA_k' \cdot m_k.$$

Is Z' de projectie van Z op genoemde raaklijn, dan geldt

$$\Sigma A_kA_k' \cdot m_k = ZZ' \cdot \Sigma m_k.$$

Zij α de hoek tussen OZ en OZ'. We hebben dan:

$$l = \frac{I}{OZ \cdot \Sigma m_k} = \frac{2R \cdot ZZ' \cdot \Sigma m_k}{OZ \cdot \Sigma m_k} = 2R \cdot \frac{ZZ'}{OZ} = 2R \sin \alpha,$$

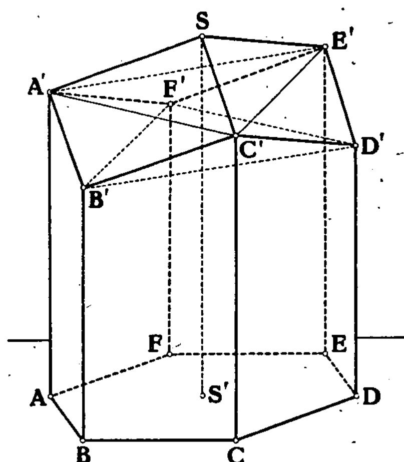
d.i. de lengte van de koorde door O en Z. Dr L. Kuipers.

XCIII. HET VRAAGSTUK VAN RÉAUMUR.

Het vraagstuk van Réaumur luidt als volgt:

Een regelmatig zeszijdig prisma door een uit drie congruente ruiten bestaand dak af te sluiten, zodanig, dat het daardoor ontstane lichaam bij gegeven inhoud een minimale oppervlakte heeft.

Men kan dit merkwaardige minimumvraagstuk als volgt oplossen. Zij de zijde van grondvlak ABCDEF $2a$ en de kortste diagonaal $2d$, dan is



$$CE = AE = AC = 2d = 2a\sqrt{3},$$

en ook

$$C'E' = A'E' = A'C' = 2a\sqrt{3}.$$

Zij verder de afstand van vlak F'B'D' en van S tot vlak A'C'E' x, en $SD' = SB' = SF' = 2y$.

Nu is de projectie van $SD' = 2y$ op SS' $2x$ en op vlak F'B'D' $2a$, dus:

$$y^2 = a^2 + x^2 \quad . \quad .. \quad (1).$$

Nu bepaalt men de punten B'', F'' en D'', waar BB', DD' en FF' vlak A'C'E' snijden. Het is duidelijk, dat dan C'D''E'F''A'B'' een regelmatige zeshoek is met zijde $2a$. Verder is gemakkelijk in te zien, dat het voor de inhoud van het lichaam geen verschil maakt of men C'D''E'F''A'B'' of het dakvormige lichaam tot bovenvlak kiest; immers de inhoud van pyramide SA'C'E' is gelijk aan de som der inhouden van F'A'E'F'', B'A'C'B'' en D'C'E'D''.

Wel verandert het oppervlak; het neemt af met de oppervlakte van C'D''E'F''A'B'' nl. $6a^2\sqrt{3}$, en met de oppervlakte van zes rechthoekige driehoekjes $6ax$; daarentegen komt de oppervlakte van de drie ruiten er bij, nl. $6dy = 6ay\sqrt{3}$. De besparing aan oppervlakte is dus $6a^2\sqrt{3} + 6ax - 6ay\sqrt{3}$, dus $6a^2\sqrt{3} - 6a(y\sqrt{3} - x)$.

Stel $u = y\sqrt{3} - x$. Nu is volgens (1):

$$u^2 - v^2 = 2(y^2 - x^2) = 2a^2, \quad u^2 = 2a^2 + v^2, \quad v = x\sqrt{3} - y.$$

u bereikt dus het minimum $a\sqrt{2}$, als $v = 0$, dus:

$$y = x\sqrt{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Uit (1) en (2) volgt: $y = a\sqrt{\tfrac{3}{2}}$, $x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Men komt nu gemakkelijk tot de volgende resultaten:

$$\cos D'C'S = \tfrac{1}{3},\ D'C'S = 70°32',\ C'SE' = 109°28'.$$

De hoek van SD' met SS' is 54°44'.

Het bijzondere bij dit lichaam is echter, dat alle vlakkenstandhoeken (met uitzondering van die aan het grondvlak) gelijk zijn. Men kan dit eenvoudig inzien (zonder enige berekening), ook dat al deze standhoeken 120° zijn.

Het bovenstaande lichaam is in de natuur aanwezig, het is nl. de bijencel, en metingen hebben uitgewezen dat de berekende hoeken volkomen overeenstemmen met die in de natuur. Van buitengewone interesse is daarbij, dat twee aaneensluitende wasvlakken een hoek van 120° insluiten. Zoals steeds streeft ook hier de Natuur naar een minimum, en de schepselen richten zich hiernaar met een feilloos instinct.

M. G. Beumer.

BOEKBESPREKINGEN.

Dr. H. Bremekamp, *Partiele differentiaalvergelijkingen.* 2e druk. P. Noordhoff N.V. — Groningen—Batavia 1948.

Tegenover de eerste druk zijn er geen veranderingen van enige betekenis. Van dit overigens voortreffelijke boek deugt alleen de titel niet. Zoals de schrijver al opmerkt komen verschillende zaken ter sprake, die door de titel niet gedekt worden, en ontbreken onderwerpen, die men verwacht zou hebben. De zaak is, dat het boek geheel aangepast is aan de Delftse practijk, en een verzameling is van de belangrijkste hulpmiddelen voor de natuurkundige en de ingenieur, voor zover die te Delft niet op andere colleges behandeld worden. Toch zal dit zeer helder geschreven boek (en van zeer rijke inhoud) ook voor anderen dan voor Delftse studenten van groot nut kunnen zijn.

Amersfoort H. J. E. BETH.

F. Harkink. *Kwadraattafel.* 2de druk, 83 blz. 13 × 19 cm. P. Noordhoff N.V., Groningen, z.j. (1949). Prijs ingenaaid *f* 2,90.

Van dit handige kwadraattafeltje waarvan de eerste druk in 1940 verscheen, ligt thans de tweede druk voor me, ditmaal in een fleurig groen omslagje gestoken.

Het bevat, zeer overzichtelijk gerangschikt, alle kwadraten van $0{,}01^2$ tot $199{,}99^2$ met een nauwkeurigheid van 2 cijfers achter de komma. Daar alle waarden $(x + 0{,}57)^2$ bijv. (x stelt hierin een geheel getal voor), uitgedrukt in eenheden van de vierde decimaal eindigen op 49, kan men de nauwkeurigheid gemakkelijk verhogen tot 4 cijfers achter de komma, als men achter de rij waarin bijv. de kwadraten van 30,57 tot en met 39,57 in 2 decimalen voorkomen, nog de toevoeging 49 plaatst. Dit is in de tafel gedaan. Voor de toevoegingen groter dan 50 is het cijfer $\bar{1}$ geplaatst. Het duidt er op dat het tweede cijfer achter de komma met 1 verminderd moet worden. Zo is $32{,}58^2 = 1061{,}46$ of, in verband met de toevoeging $\bar{1}64$, 1061,4564. Uiteraard leent de tafel zich eveneens voor het bepalen van de wortels uit de getallen 0,0001 tot 39996,0001.

Men kan er, zoals de schrijver aangeeft, ook mee vermenigvuldigen.

Immers moet men *ab* bepalen en stelt men $\frac{a+b}{2} = m$ en $m - a = b - m = d$ dan is $ab = m^2 - d^2$. Deze kunstgreep verruimt de mogelijkheden van het handige tafeltje nog meer. Enkele voorbeelden voor het gebruik er van zijn aan de binnenzijde van de omslag vermeld.

Zij die van de landmeetkunde hun beroep maken — voor hen is de tafel door het handige formaat een gemakkelijk hulpmiddel in het terrein — zullen met genoegen zien dat ook in deze druk de bekende tafel ter bepaling van de oppervlakte S van een cirkelsegment uit de koorde k en de pijl p, $S = pkV$, is opgenomen.

$$V = \frac{2}{3} + \frac{2^3}{1\times3\times5}\left(\frac{p}{k}\right)^2 - \frac{2^5}{3\times5\times7}\left(\frac{p}{k}\right)^4 + \frac{2^7}{5\times7\times9}\left(\frac{p}{k}\right)^6 - \ldots$$

is hierin voor waarden van $\frac{p}{k}$ tussen 0 en 0,5 getabuleerd zodat men er ook nog de oppervlakte van een halve cirkel mee kan berekenen.

Ik beveel het boekje gaarne van harte aan.

N. D. HAASBROEK.

A critical investigation into relativism, by H. Ferguson, W. P. van Stockum & Zn., 's Gravenhage. 1948. 56 blz. Prijs?

Met „relativism" bedoelt de schr. de „theory of relativity". De schr. heeft echter niet alleen van de naam, maar ook van de inhoud van de relativiteitstheorie onvoldoende kennis genomen, waardoor de bestrijding, die hij in dit boekje bedoelt te leveren, min of meer een slag in de lucht wordt. Schr. knoopt aan bij het experiment en gaat na, in hoeverre dit ons zou dwingen de rel.th. te aanvaarden; het boekje bevat daardoor drie hoofdstukjes, behandeldende 1° the Michelson experiment, 2° the aberration of light, 3° some irregularities observed in the orbits of planets, not explained by the laws of Newton. In het eerste hoofdstuk laat schr. zien, dat voor de verklaring van het experiment hoogstens de aanname van verkorte meetstaven, niet die van verlangzaamde klokken nodig is. Overigens verwerpt hij ook de verkorting der meetstaven. Ter typering van schr's opvattingen diene het volgende citaat: „If I judge rightly, relativism does not indeed teach the existance of two different times t and t_1 in reality, but only that one and the same time appears to be different in the two systems,

because the units of time, by means of which we measure the time, differ in one system from the units of time in the other. This, I presume, is the meaning of the clocks going slow or fast, according to the translate motion of the system".

Hij begrijpt dan ook niet, hoe Einstein van een constante lichtsnelheid spreken kan, „als hij geen constante eenheden van lengte en tijd kent". Tenslotte oordeelt schr. Einstein's opvattingen als logisch onmogelijk, omdat bewegende klokken tegelijkertijd langzamer en sneller zouden moeten lopen dan stilstaande. We kunnen schr. hiervoor verwijzen naar de Relativiteitstheorie van dr. A. D. Fokker, hdfst. 3,8.

In het 2e hoofdstuk stelt schr. een zestal hypothesen op, o.a.: 1°. the ether is not stationary, 4° a ray of light, passing through the ether, pursues its straight direction independently from the motions in the ether. Aan de hand van deze hypothesen en in rekening brengend onze eigen beweging en die van de lichtbron wil schr. komen tot een coördinatensysteem, waarin de lichtstralen hun ware richting vertonen (z.g. light-coördinates). In hfdst. 3 geeft de schr. dan nog allerlei voorbeelden t.a.v. de noodzakelijkheid dezer licht-coördinaten; zo becritiseert hij b.v. het experiment van Gauss ter meting van de som van de hoeken van een driehoek vanaf drie bergtoppen; zijn eindconclusie is, dat wij geen „competent judges in the matter of the deviations of Newton's laws" zijn, zolang wij niet al onze waarnemingen t.o.v. de planetenbanen hebben omgerekend in licht-coördinaten.

De electro-dynamica en de algemene relativiteitstheorie komen in dit boekje niet aan de orde. H. STR.

J. Versluys—P. Wijdenes, *Grote tafel in vijf decimalen* (tafel H). 4e druk. P. Noordhoff, Gron. 1948. geb. *f* 6.25.

Deze goede oude bekende is weer verkrijgbaar. Hij bevat de gewone logarithmen, de logarithmen der goniometrische functies, de goniometrische functies met zeer nauwkeurige speciale interpolatietafels voor cotangenten van kleine hoeken; deze tafel is daarom zo aantrekkelijk, omdat men er ook de goniom. functies in aflezen kan van hoeken, die in radialen uitgedrukt zijn. Ook staat er nog een afzonderlijke tafel in ter herleiding van hoeken in radialen in 7 dec. Een zevental bijtafels besluit de inhoud. Al met al een bezit voor het leven. H. STR.

Lagere Algebra. Leerboek voor de acte Wiskunde L. O. door P. Wijdenes; dl. I: de algebraïsche grootheden en hun bewerkingen. 5e druk. P. Noordhoff, Groningen, 1949. geb. *f* 8.75.

Men kan het betreuren, dat de eisen voor de acte Wiskunde L.O. zijn, zoals ze zijn, waardoor de „lagere" algebra wel door en door „laag" is. Maar wat er dan in die lagere algebra te beleven valt, vindt men in dit boek met veel geduld en uitvoerigheid uiteengezet. Het zal zijn weg dan ook wel weer vinden. Misschien, dat in de toekomst ook het begrip „macht met onmeetbare exponent" nog eens aan de orde komt, maar dan komen er nog wel meer soortgelijke wensen los. De acte Wiskunde L.O. maakt deze onderwerpen nog overbodig.

H. STR.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff. Groningen—Batavia.

Ir. W. C. Coepyn, *Berekening van Staafwerken volgens de Methode „Cross"*. Handleiding voor het onderwijs en de zelfstudie — 2de druk, *f* 2,35.

A. J. Liefkens en B. H. Gerritsma, *Algebra,* deeltje 1 — 4de druk — Onze Technische Serie. *f* 1,10.

P. Wijdenes, *Lagere Algebra.* Leerboek voor de akte Wiskunde L.O. en voor inrichtingen van onderwijs met uitgebreid wiskundeprogramma. Deel I — De algebraische grootheden en hun bewerkingen — 5de druk — gebonden *f* 8,75.

J. Versluys—P. Wijdenes, *Grote tafel — Tafel H* in 5 decimalen — bevattende 1. Gewone logartihmen — 2. Logarithmen der goniometrische functies — 3. Goniometrische functies met interpolatietafels — 4. Bijtafels. 4de druk, gebonden *f* 6,25.

Dr. H. Bremekamp, *Partieele Differentiaalvergelijkingen* met toepassingen — naar het college aan de T. H. te Delft — 2de druk. *f* 6,50, gebonden *f* 7,50.

H. J. van Veen, *Beknopt leerboek der Beschijvende meetkunde a.* Projectiemethoden; *b.* Oppervlakken en ruimtekrommen; *c.* Kegelsneden — met atlas — 4de druk — gebonden *f* 15,—.

F. Harkink, *Kwadraattafel* — 2de druk. *f* 2,90.

P. Wijdenes, Oplossingen van de vraagstukken uit de Stereometrie van Dr Molenbroek, 5e druk, 110 blz., 40 fig., *f* 3,50.

Van A. W. Sijthoff's Uitgeversmaatschappij te Leiden:

Prof. Dr. A. J. v. Pesch, Logarithmen-tafels in 5 decimalen. **17de druk.**

Tafel I. De Briggse log. in 5 dec. blz. 1—19.

Tafel II. Log. van de gon. verhoudingen, blz. 21—75.

Tafel III De goniometrische verhoudingen, blz. 77—101.

Tafel IV geeft een aantal bijtafels nl. omzetting van graden in radialen en omgekeerd, kwadraattafel, wortels, factorentafel, log. van rentefactoren, lengte van bogen in 7 dec. en enige constanten met hun logarithmen.

CIRCULATIE VAN TIJDSCHRIFTEN.

Op de algemene vergadering van WIMECOS van 5 Januari 1949 is besloten om een circulatie van tijdschriften onder de leden van de vereniging in te stellen.

In de eerste plaats is het de bedoeling om hierdoor het kennisnemen van buitenlandse literatuur op het gebied van de didactiek en de methodiek der wiskunde te vergemakkelijken. Ook enkele Nederlandse uitgaven op het gebied der algemene en bijzondere didactiek en methodiek, zoals Paedagogische Studiën en de Mededelingen van het Nutsseminarium voor Paedagogiek, zullen bij voldoende belangstelling worden rondgezonden.

De voorlopige lijst van tijdschriften, waaruit men een keuze zal kunnen doen, is:

a. Elemente der Mathematiek,
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des Mathematisch-physikalischen Unterrichts,
Organ fur den Verein schweizerischer Mathematiklehrer,

b. the Mathematical Gazette,
journal of the Mathematical Association, London;

c. the Mathematics Teacher,
official journal of the National Council of Teachers of Mathematics, New York;

d School Science and Mathematics, Menasha;

e. l'Enseignement Mathematique, Genève;

f. der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn-Frankfurt a. M.

g. Paedagogische Studiën, Groningen.

Alleen leden van WIMECOS en van LIWENAGEL komen voor toezending van deze uitgaven in aanmerking. De deelnemers zullen de afleveringen der tijdschriften stuk voor stuk ontvangen, mogen ze maximaal 7 dagen ter lezing houden, en zenden ze door aan een adres, dat ze in de aflevering vinden vermeld. Deze wijze van circuleren is aan hen, die aan de Portefeuille van VELINES deelnemen, welbekend.

Aan belangstellenden wordt nu verzocht:

a) op te geven — aan onderstaand adres —, welke van de tijdschriften uit de bovengenoemde lijst ze na 1 September 1949 wensen te ontvangen;

b) op te geven, welke *andere* tijdschriften ze wensen te ontvangen; bij voldoende deelname zullen dan ook deze op de lijst worden geplaatst.

In de volgende aflevering van EUCLIDES, of zo nodig per circulaire, zal bekend gemaakt worden, wat voor de deelnemers de bijdrage in de kosten zal zijn. Momenteel is van enige tijdschriften de prijs nog niet bekend. Voorlopig rekene men op een bedrag van ongeveer f 1,50 per jaar voor elk tijdschrift, dat men wenst te ontvangen. Aan de deelnemers zullen de uitgaven van het Wiskundig Genootschap gratis worden toegezonden.

Arnhem, 24 Mei 1949,

JOH. H. WANSINK,
2de Secretaris,
Julianalaan 84

OVER DE WISSELWERKING TUSSEN WISKUNDE EN PHYSICA IN DE LAATSTE 40 JAREN

door

Dr J. A. SCHOUTEN.

Vijf en dertig jaar geleden heb ik bij mijn ambtsaanvaarding te Delft een rede uitgesproken over het wezen en de practische beteekenis der directe analyses. Onder een direkte analyse verstond men toen een invariante symboliek, die het uitschrijven van coördinaten althans gedurende de berekeningen onnoodig maakte en het was destijds nog noodig voor dergelijke symbolische methodes een lans te breken. Er is in die 35 jaren veel gebeurd, symbolische methodes worden thans overal gebruikt en zij geven zooveel gemak en arbeidsbesparing dat men wel over het bezwaar heen moet stappen dat zij als zoovele geheimschriften den toegang tot een verwant vakgebied nu niet bepaald gemakkelijker hebben gemaakt.

De vraag naar de al of niet wenschelijkheid van symbolische methodes is dus geen vraag meer en zeker geen geschikt onderwerp voor de bespreking van heden. Daarentegen lijkt het aangewezen het eens te hebben over de ontwikkeling in de laatste 40 jaren en in het bijzonder over de eigenaardige wisselwerking tusschen physica en wiskunde, die wel nooit zoo intens geweest is als juist in dit tijdperk. Mijn voordracht zal uit twee deelen bestaan. Het eerste deel zal wat meer technisch-mathematisch zijn en ik verzoek hier aanwezige niet vakgenooten niet zoozeer op de details te letten dan wel op de hoofdlijnen, die ik zoo zwaar hoop aan te zetten dat zij voor een ieder te volgen te zijn. Het tweede en belangrijkste deel is in meer menschelijke taal en zeker voor een ieder begrijpelijk.

In mijn studietijd trof ik een meetkunde aan, die tot een prachtige en schijnbaar afdoende afsluiting was gekomen. De strijd tusschen de meetkunden van Euclides, van Bolyay en van Lobatschewsky, de controversies tusschen projectieve, affine en metrische meetkunden waren in een hoogere harmonie opgeheven. Immers had Felix Klein al in 1872 in het „Erlanger program" het beginsel uitgesproken dat iedere meetkunde slechts de invariantentheorie is behoorende bij een bepaalde (eindige of oneindige) Lie'sche transformatiegroep en nadien hadden Klein en zijn leerlingen dit

[1]) Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar aan de universiteit van Amsterdam op 21 Februari 1949.

beginsel volkomen uitgewerkt en was het inzicht, dat de meetkunde één groot gebouw is met vele kamers, elk geregeerd door een der vele ondergroepen van de alomvattende groep der continue transformaties, gemeengoed geworden van een groote groep van mathematici waartoe ook reeds enkele physici behoorden.

Er is in de geschiedenis der wiskunde een sinistere wet, die zegt, dat wanneer een gebied zóó goed is doorwerkt en belicht, dat er eigenlijk niet veel meer overblijft dan een stelsel van afzonderlijke puzzles, de aandacht der beste mathematici zich spoedig van dit gebied af en andere minder goed doorvorschte gebieden toewendt. Zoo verging het de klassieke differentiaalmeetkunde in drie afmetingen na een periode van grooten bloei en hetzelfde geschiedde met de projectieve meetkunde, die eenmaal in het centrum der belangstelling had gestaan. Als ingedijkte polders kwamen deze gebieden buiten den stroom te liggen, als veilig bezit klaar om vruchten op te leveren waar noodig, maar niet langer tooneel van strijd en overwinning.

Ongetwijfeld ware het in het begin van deze eeuw ook zoo gegaan met de door Klein geordende en geconsolideerde meetkunden, ware het niet dat er omstreeks dien tijd in de physica een probleem opdoemde, dat juist het Klein'sche gebouw der meetkunden zou blijken noodig te hebben. De reeds door Voigt in 1887 even aangeraakte, door Lorentz in 1892 nader beschouwde en in 1906 tot een voorloopige formuleering gebrachte invariantie der Maxwellsche vergelijkingen bij orthogonale transformaties in 4 afmetingen (Lorentz transformaties) wachtte slechts op een physicus vertrouwd met de moderne meetkunde om tot een geheel nieuwen inslag in de physica te voeren. Inderdaad formuleerden Poincaré, die steeds in nauwe betrekking tot Klein had gestaan, en Einstein, die reeds geheel in de traditie van het Erlanger program was opgegroeid, in 1905 onafhankelijk van elkaar het relativiteitsbeginsel, terwijl het aan Einstein als physicus voorbehouden bleef het relativiteitspostulaat te formuleeren, dat invariantie van alle natuurverschijnselen bij de Lorentz-groep verlangt. Voor de physica was het gebeurde een omwenteling, voor de wiskunde daarentegen voorloopig niet meer dan een mooi voorbeeld van een meetkunde met een indefiniete metriek naast vele anderen. Intusschen gingen de gebeurtenissen zeer snel en wist Einstein, wederom gebruik makende van groote hoeveelheden mathematische kennis, opgehoopt in de werken van Riemann, Christoffel en verschillende Italiaansche geometers waaronder vooral Ricci Curbastro, zijn algemeene relativiteitstheorie te formuleeren (afsluiting 1916) waarin de ver-

gelijkingen der physische verschijnselen invariant werden bij algemeene continue transformaties der coördinaten. De ruimte-tijd wereld werd nu een gekromde Riemannsche ruimte, „gekromd" omdat er niet meer van rechte lijnen kon worden gesproken maar alleen van geodetische lijnen, en de eenvoudige relativiteitstheorie van 1906 bleef slechts geldig in iedere „lokale" ruimte-tijd. Op zichzelf was dit mathematisch nog niet verontrustend daar ook de Riemannsche ruimte nog in het Klein'sche schema paste, zij het dan ook dat de ten grondslag liggende Lie'sche groep een zoogenaamde „oneindige" is, die tot een zeker geometrisch object, den „fundamentaaltensor" behoort. Maar toch ontstond door de onverwachte realizeering van zulk een gekromde ruimte in onze eigen ruimte-tijd-wereld een eigenaardig gevoel van wanbevrediging. Onwillekeurig drongen zich vragen op als: hoe moet een proefpersoon zich in zoo'n ruimte voelen, wat zal hij ervaren bij een verplaatsing, e.d. In de geometers van dat tijdsgewricht, die zich in die nieuwe werelden daadwerkelijk wilden inleven en dat binnen de grenzen der bestaande structuur schema's niet of kwalijk konden, ontstond een toestand van spanning, die vroeg of laat tot een ontlading moest voeren. En die ontlading kwam dan ook nog vóór het einde van den eersten wereldoorlog toen onafhankelijk van elkaar een Italiaansch en een Nederlandsch auteur het begrip van het *pseudoparallelisme* introduceerden [1]). Nu is het merkwaardigste aan dit parallelisme dat het niet lang van te voren was ontdekt. De onderzoekingen van Christoffel, Lipschitz, Ricci, Curbastro en vele anderen hadden alles voorbereid en men had eenvoudig maar den „covarianten differentiaal" van Ricci Curbastro nul behoeven te stellen om de pseudoparallele verplaatsing te verkrijgen. Maar niets van dit alles gebeurde en het nieuwe begrip werd eerst gevonden nadat de physica na de algemeene relativiteitstheorie den aanstoot had gegeven. Het is dan ook teekenend dat in de verhandelingen der genoemde twee auteurs beide in den eersten zin van de inleiding uitgaan van de relaticiteitstheorie!

Het nieuwe denkbeeld werkte in hooge mate stimuleerend op het wiskundig onderzoek. Het raderwerk der meetkunde, dat een oogenblik in tevreden zelfbeschouwing dreigde te zullen gaan stil staan, kwam weer op volle toeren en men kan wel zeggen, dat de eigenlijke moderne differentiaalmeetkunde met het pseudoparalle-

---

1) Levi Civita, Rend. Circ. Mat. Pal. 42 (1917) 173—205; Schouten, Verh. Kon. Akad. v. Wet. 12 (1918) No 6, 95 blz.

lisme begint. Directe veralgemeening, nu weer geheel onafhankelijk van eenige ervaringswetenschap, voerde tot de theorie der lineaire overbrengingen, waarbij een meetkunde tot stand komt door een voorschrift hoe men locale ruimten (hoe dan ook gedefinieerd) op elkaar kan afbeelden. Zulk een afbeelding behoort steeds tot de een of andere eindige Lie'sche transformatiegroep en zoo ontstaat er weer een indeeling van meetkunden naar de ten grondslag liggende groepen, maar een geheel andere als die van Klein. De meetkunden van Klein hadden als het ware de groep van binnen in de ruimte zelf, de overbrengingsmeetkunden hebben haar alleen van buiten in de betrekkingen tusschen naburige locale ruimten. Bij iedere Klein'sche meetkunde behoort een overbrengingsmeetkunde, die zich tot de eerste verhoudt als de meetkunde op een gebogen oppervlak tot die in een plat vlak, en men kan dus op deze wijze bijvoorbeeld „gekromde" projectieve of conforme meetkunden ontwikkelen.

De nieuwe meetkunden noopten nu andere onderzoekers en onder hen als eersten Eisenhart en Veblen in 1922 [1]), alles eens vanuit een ander gezichtspunt te bezien en weer aan te knoopen aan de Klein'sche opvatting van de Riemannsche meetkunde als de invariantentheorie van een oneindige Lie'sche groep behoorende tot een bepaald geometrisch object. In plaats van een overbrenging legden zij een of meer geometrische objecten ten grondslag en ontwikkelden de bij deze behoorende objectmeetkunde. Alras bleek, dat iedere overbrengingsmeetkunde ook als objectmeetkunde op te vatten was en ook dat de meest interessante objectmeetkunden als overbrengingsmeetkunden konden worden geduid, hetgeen niet weg nam dat het begrip objectmeetkunde tenslotte toch iets ruimer was. Weliswaar gaf Cartan in 1936 in Oslo als zijn meening te kennen, dat de objecttheorie, bijvoorbeeld toegepast op de Riemannsche meetkunde „masque complètement ce qu'il y a en elle de géométrique au sens intuitiv du mot", maar daar stond tegenover dat anderen juist in de objecttheorie de meest „natuurlijke" opvatting zagen. Dit bewijst alleen dat het emotioneele element bij mathematici (gelukkig) een veel grooter rol speelt dan de buitenstaander pleegt te denken. Afgescheiden van alle emoties vulden overbrengingstheorie en objecttheorie elkaar prachtig aan en leidden zij tot allerlei andere onderzoekingen, bijv die over Finsler'sche en aan deze aanknoopende Cartan'sche meetkunden

---

[1]) Proc. Nat. Acad. of Sc. 8 (1922) 19—23.

en die over geometrische objecten als zoodanig. Inderdaad was het bedrijf weer in vollen gang.

Het pseudoparallelisme werkte op de physica terug, eerst direkt door de ontdekking van een nieuw relativistisch effect in de praecessiebeweging van de aarde en vervolgens, na een eerste mathematische generalizeering, door de theorie van Weyl. Reeds in 1910 hadden Cunningham [1]) en Bateman [2]) ontdekt, dat de Maxwellvergelijkingen eigenlijk invariant waren bij een veel ruimere groep dan de 10 parameters tellende van Lorentz, namelijk bij de 15 parameters tellende groep der conforme transformaties. Nu verving Weyl 1918 de Riemannsche overbrenging door een andere, die inderdaad in iedere locale ruimte-tijd behoort tot de conforme groep, alleen was zijn overbrenging niet volledig invariant bij conforme transformaties maar nog mede afhankelijk van de transformaties van een soort vectorveld dat dan met den electromagnetischen potentiaalvector werd geidentificeerd. Het belangrijke was dat Weyl daarmede voor de eerste maal een „unificeering" bereikte van gravitatie en electromagnetisme. Een bezwaar was dat bij zijn pseudoparallelisme maatstaven bij rondvoering in electromagnetische velden hun lengte konden veranderen, wat niet in overeenstemming was met de meetresultaten. De pseudoparallelverplaatsing uit de theorie mocht dus niet met de werkelijke parallelverplaatsing worden geidentificeerd en daarmede verloor de theorie veel van haar aantrekkelijkheid. De eenmaal gewekte gedachte van een unificeering liet echter de onderzoekers niet meer met rust en reeds in 1921 wist Kaluza [3]) die te bereiken door het invoeren van een vijfde dimensie. In plaats van den spanning-impuls-energietensor der materie in de gewone theorie met een matrix van 4 rijen en 4 kolommen treedt dan een tensor met een matrix van 5 rijen en 5 kolommen, waarin de vijfde alleen electromagnetische grootheden bevat. De raadselachtige vijfde dimensie bezorgde eerst wat last maar Veblen en Hoffmann [4]) wezen er in 1930 op dat de vijf coördinaten konden worden opgevat als homogene coördinaten in een locale ruimte-tijd. Hier kwam te stade dat de projectieve differentiaalmeetkunde intusschen door verschillende scholen en op verschillende wijzen was ontwikkeld. Bij Veblen en zijn school bleef de homogene behandeling tot de lokale ruimte-tijd beperkt, men had dus hier een ruimte-tijd-wereld met 4 (kromlijnige)

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910) 77—98.
[2]) Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910), 23—264; 469—488.
[3]) Sitz Ber. Preuss Akad. d. Wiss. (1921) 966—972.
[4]) Phys. Rev. 36 (1930) 810—822.

coördinaten en in elke locale ruimte-tijd 5 homogene projectieve coördinaten en een door een kwadratische vergelijking in deze coördinaten vastgelegd 3-dimensionaal hyperoppervlak dat den fundamentaaltensor representeert. Hier in Holland gebruikten wij daarentegen [1]) in de ruimte-tijd-wereld de door v. Dantzig [2]) in 1932 ingevoerde 5 homogene kromlijnige coördinaten, die zich fraaier aan de 5 locale coördinaten aanpasten. Spoedig bleek, dat het niet moeilijk was een unificeerende theorie op te stellen, er kwamen er eigenlijk zelfs veel te veel, die allen met het getal 5 in verband stonden, allen op hun wijze betrekkelijk behoorlijke resultaten lieten zien zoolang het ging om unificeering en allen vrij behoorlijk in elkaar konden worden vertaald. Toch kwam het weer tot een stilstand omdat alles misliep zoodra het ging om het probleem van de verhouding van veld tot deeltje, culmineerende in de vraag hoe een oneindige eigenenergie van puntvormige deeltjes kon worden vermeden. Tegen die vraag bleek ook geen der vijfdimensionale theoriën opgewassen en voorloopig was de stand dus zoo, dat unificeering blijkbaar gemakkelijk kon worden verkregen met behulp van 5 coördinaten hoe dan ook geduid, maar dat het raadsel der eigenenergie niet was opgelost en dat de conforme invariantie voorloopig weer van de baan was.

Van geheel onverwachte zijde kwam er nu hulp voor de conforme theorie. Wederom lag er een groote hoeveelheid mathematisch materiaal opgestapeld dat slechts scheen te wachten op een nieuwen impuls van de physica. De representatietheorie der eindige groepen was reeds lang opgesteld door Frobenius [3]) en Cartan gaf in 1913 [4]) reeds een vrij volledige theorie van de representatie van de halfenkelvoudige continue groepen inclusief een spintheorie voor een willekeurig aantal dimensies, dit laatste onbewust van het feit dat reeds in 1901 E. Waelsch [5]) in zijn binairanalyse beschikte over het geheele apparaat van de 2-dimensionale spin en na 1910 [6]) van de 4-dimensionale spin (dubbel binaire vormen) zonder dat hij met deze dingen eigenlijk iets kon beginnen. Wederom onafhankelijk

---

[1]) Zie bijv. Ann. of Math. 34 (1933) 271—312; Ann. de l'Inst. H. Poincaré 5 (1935) 51—88.

[2]) Math. Ann. 106 (1932) 400—454.

[3]) Sitz Ber. Berl. Akad. (1897) 994—1015; (1899) 482—500; (1900) 516—534; (1903) 328—358.

[4]) Bull. Soc. Math. de Fr. 41 (1913) 53—96.

[5]) Wiener Anzeiger 38 (1901) 303—314, zie verder Jahresber. D.M.V. 24 (1915) 382—389.

[6]) Jahresber. D.M.V. 19 (1910) 90—98.

had A. Young[1]) 1901 al een theorie gegeven over wat men tegenwoordig invariante splitsing van affinoren of ook representatietheorie van de affine-groep zou noemen en was Waelsch met zijn binairanalyse zelfs voor de dimensiegetallen 3 en 4 al doorgedrongen tot invariante splitsingen bij de orthogonale groep. Maar dit alles bleef eigenlijk braak liggen, wat dan soms tragisch was zooals in het geval van Waelsch, die voor zijn levenswerk overal belangstelling trachtte te wekken en die eigenlijk nergens wist te vinden. Tot dat eindelijk in 1925 de lont in het kruit viel en Uhlenbeck en Goudsmit het electron lieten spinnen. Dat voerde dan via de eenvoudige Pauli'sche 2 dimensionale spinruimte in 1927 (het sterfjaar van Waelsch!) tot de vierdimensionale spinruimte van Dirac in 1928, die het verband zou leggen tusschen de relativiteitstheorie en de inmiddels op ieder gebied veld winnende quantenmechanica. Ook hier was er weer een sterke terugslag op de wiskunde, eerst eischte het nieuwe gebied hergroepeering en consolidatie van voorhanden stof, maar spoedig gingen de mathematici al weer aan het werk om de zaak zelf en zagen tal van nieuwe publicaties over de representatie van eindige en continue groepen en over de theorie der spinruimten het licht. Zelfs vatte D. E. Littlewood vanaf 1943 [2]) het oude probleem van de invariante ontbinding van affinoren van A. Young weer op, maar nu voor de orthogonale groep en met behulp van spingrootheden, daarmede zonder het te weten denzelfden weg volgend dien Waelsch al voor 3 afmetingen had begaan met zijn binaire vormen.

Wat is nu eigenlijk die spinruimte? In een R_n (vlakke n-dimensionale ruimte met gegeven vasten fundamentaaltensor) beschouwe men een $(n - 1)$-dimensionale eenheidshyperbol. Op die hyperbol liggen voor $n = 2\nu$ *een* stelsel van $\infty^{\binom{\nu+1}{2}}$ $(\nu - 1)$-dimensionale *vlakke* uitgebreidheden en voor $n = 2\nu + 1$ *twee* stelsels van elk $\infty^{\binom{\nu+1}{2}}$ ν-dimensionale *vlakke* uitgebriedheden. Bij een orthogonale transformatie in R_n is de bol in zijn geheel invariant en al die vlakke uitgebreidheden en hun doorsnijdingen worden in elkaar getransformeerd op een wijze, die een afbeelding (representatie) is van de orthogonale transformatie in R_n. De spinruimte is nu, populair gezegd, niets anders als het stelsel van deze vlakke uitgebreidheden en hunne doorsnijdingen. Deze uitspraak, hoewel populair, is volkomen correct, al zou het dan ook nogal wat tijd vorderen om precies de verhouding tusschen spinruimte en eenheidsbol aan te

---

1) Proc. Math. Soc. London 33 (1901) 97—146; 34 (1902) 361.

2) Proc. Lond. Math. Soc. 49 (1943) 307—327; 50 (1945) 349—379.

geven en bijv. te bewijzen dat de dimensie N van de spinruimte altijd gelijk 2^ν is, dus bijv. N = 4 voor $n = 4$ en N = 8 voor $n = 6$. In R_4 zijn de vectoren der spinruimte bijv. de ∞^4 gebonden vectoren, die liggen in de ∞^3 rechte lijnen op den eenheidsbol, of wat hetzelfde is, de ∞^4 enkelvoudige bivectoren, die liggen in de ∞^3 platte vlakken op den lichtkegel in ruimte-tijd.

Intusschen is er nog een andere weg om juist voor een R_6 tot de bijbehoorende spinruimte te komen. Het was al aan F. Klein bekend dat men de rechte lijnen in de gewone ruimte kan opvatten als punten van een kwadratisch 4-dimensionaal hyperopperylak in een projectieve vijfdimensionale ruimte (dus met 6 homogene coördinaten) of, wat op hetzelfde neerkomt, de bivectoren in de vierdimensionale affine ruimte als vectoren in een R_6 (Plücker-Klein'sche correspondentie). Veblen kwam reeds 1930 op het denkbeeld dit toe te passen op de spintheorie. De vierdimensionale affine ruimte wordt dan spinruimte en de coördinaten der R_6 kunnen desgewenscht worden opgevat als de overtallige 6 coördinaten van een vierdimensionale conforme meetkunde. Dit denkbeeld werd vanaf 1933 in Princeton [1]) en ook bij ons in Holland [2]) nader uitgewerkt en daarbij bleek duidelijk, dat de vierdimensionale spinruimte het fraaist en eenvoudigst verbonden is met een R_6, dus met een conforme ruimte-tijd-wereld, en dat zoowel de projectieve behandeling met 5 coördinaten alsook de gewoon relativistische met 4 eerst hieruit door specializatie ontstaan.

Hoe klopt dat nu echter met de dimensie van de spinruimte van een R_6, die toch naar wij zagen N = 8 is? In iedere spinruimte liggen altijd twee invariante vlakke uitgebreidheden met dimensie N/2, die geen richting gemeen hebben. Bij draaiingen in R_6 blijven deze elk voor zich invariant en bij spiegelingen worden zij eenvoudig verwisseld. Bepalen we ons nu tot draaiingen in een R_n (de spiegelingen kunnen altijd later nog achterhaald worden door bijv. één spiegeling apart te beschouwen), dan kan men voor $n = 4$ met één der uitgebreidheden van de dimensie 2 volstaan op grond van het verrassende feit dat de transformatie in de éene volkomen de transformatie in de andere bepaalt. Dit leidt tot de oorspronkelijke eenvoudige 2-dimensionale spintheorie (Pauli matrices, spinoranalyse van v. d. Waerden). Ook voor $n = 6$ geldt nu iets dergelijks, tengevolge van het optreden van een nieuwe onverwachte inva-

---

1) Veblen, Proc. Nat. Acad. 19 (1933) 462—474.

2) Schouten en Haantjes, Zeitschr. f. Phys. 81 (1933) 405—417; Ann. di Pisa 4 (1935) 175—189.